PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Volumen 3

Coordenadas baricéntricas

Gerard Romo Garrido



Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates Cool·lección** son recopilaciones de materiales matemáticos, redactados, ordenados y sistematizados por **Gerard Romo**, con el objetivo de que puedan ser útiles para cualquier estudiante de matemáticas.

"**Always Under Construction**": Debido a lo ambicioso del proyecto, estos documentos se van ampliando, corrigiendo y completando a lo largo de los años.

Se agradecerá cualquier observación, comentario, rectificación o colaboración a
toomates@gmail.com



Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición.

Actualmente **Toomates Cool·lección** consta de los siguientes documentos:

Geometría axiomática:

Geometría Axiomática pdf doc1 2 3 4 5 6 7 ... 19 20 21 portada
Problemas de Geometría (Vol. 1) pdf doc
Problemas de Geometría (Vol. 2) pdf doc
Problemas de Geometría (Vol. 3) pdf doc

Matemáticas para el bachillerato (en catalán):

Àlgebra Lineal Batxillerat pdf doc
Geometria Lineal Batxillerat pdf doc
Càlcul Infinitesimal Batxillerat pdf doc1 2
Programació Lineal Batxillerat pdf doc

Problemarios:

Problemas de Matemáticas (Vol. 1) pdf doc
Cangur Integral (en catalán) pdf doc

Versión de este documento: 20/09/2018

www.toomates.net

Índice.

Este volumen está dedicado íntegramente a practicar las **coordenadas baricéntricas** y su aplicación en la resolución de problemas de geometría. Estos conceptos se introducen y se desarrollan en los capítulos 18 y 19 del libro de teoría.

1. The Outer Vecten Point.

Sea A_1 el centro del cuadrado inscrito en un triángulo agudo ΔABC con dos vértices del cuadrado en el lado BC. Así pues, uno de los otros dos vértices del cuadrado está en el lado AB y el otro en AC. Los puntos B_1 y C_1 se definen de forma similar para los cuadrados inscritos con dos vértices en los lados AC y AB, respectivamente. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 son concurrentes.

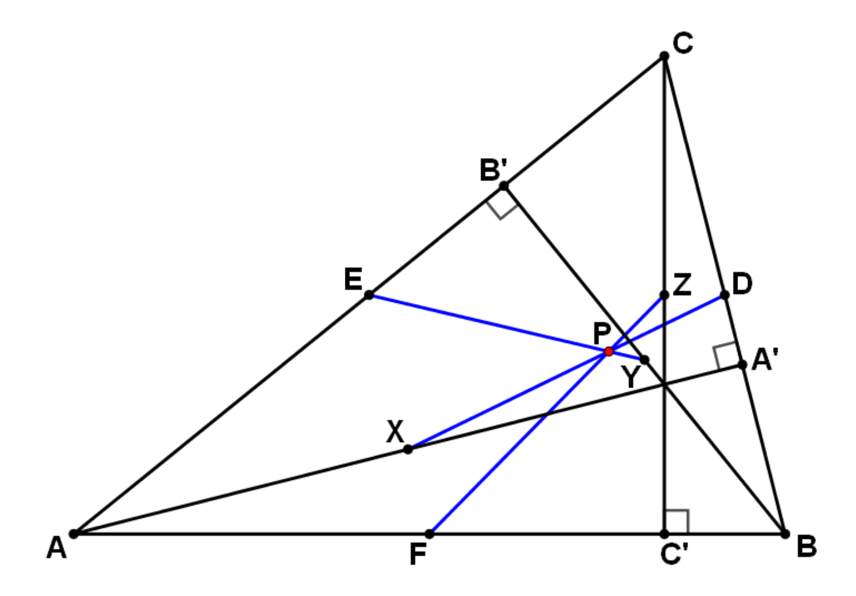
ISL 2001/G1

Nota: El punto de concurrencia se llama en inglés "**the Outer Vecten Point**".

Fuente: Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry (Max Schindler, Evan Cheny, July 13, 2012)

2. Punto simediano.

Sean D, E, F los puntos medios de los lados BC, CA, AB del triángulo ΔABC , y X, Y, Z los puntos medios de las alturas desde A, B, C, respectivamente. Hallar las ecuaciones de las rectas DX, EY y FZ, y demostrar que son concurrentes. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?

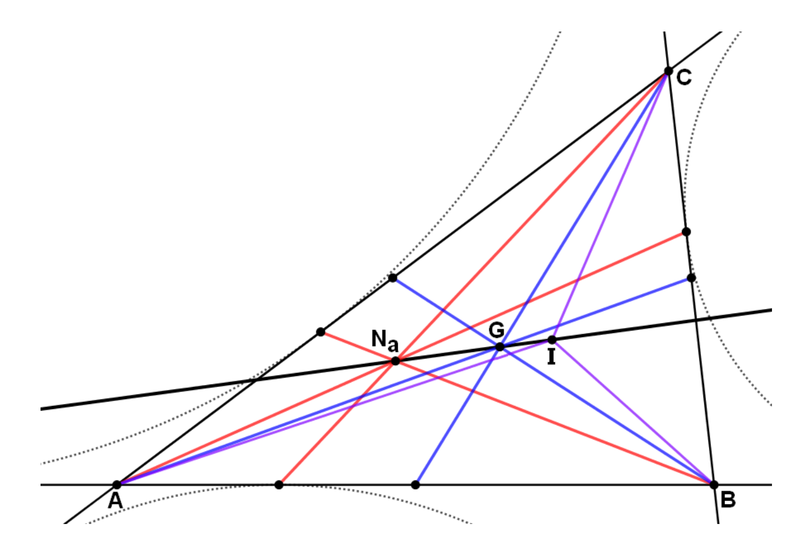


Fuente: "Coordenadas Baricéntricas" de Francisco J. García Capitán (página 21)

Nota: El ejercicio #25 de este volumen es una ampliación de este ejercicio.

3. Punto de Nagel vs Baricentro & Incentro.

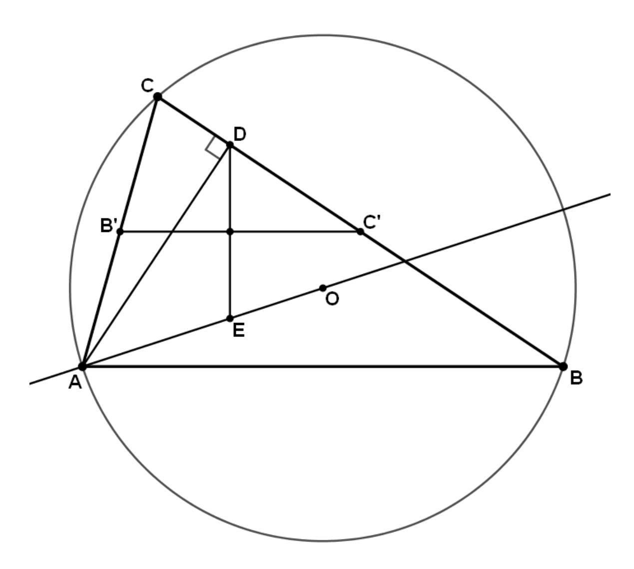
Demostrar que el punto de Nagel N_a está en la recta que une el baricentro y el incentro y divide a IG en la razón $I N_a : N_a G = 3 : -2$



Fuente: "Coordenadas Baricéntricas" de Francisco J. García Capitán (página 13)

4. Circuncentro, altura, puntos medios, punto simétrico.

Sea ΔABC un triángulo. Sea D el pie de la altura por A. Sea l la recta que pasa por los puntos medios de BC y AC. Sea E el punto simétrico de D respecto de l. Demostrar que el circuncentro del triángulo ΔABC pasa por la recta AE.

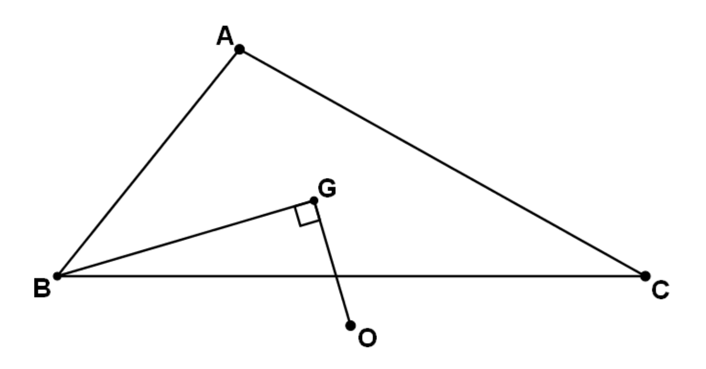


CentroAmerican 2017

Fuente: "Notes on Barycentric Homogeneous Coordinates" (Wong Yan Loi), Página 14

5. Perpendicularidad con circuncentro y baricentro.

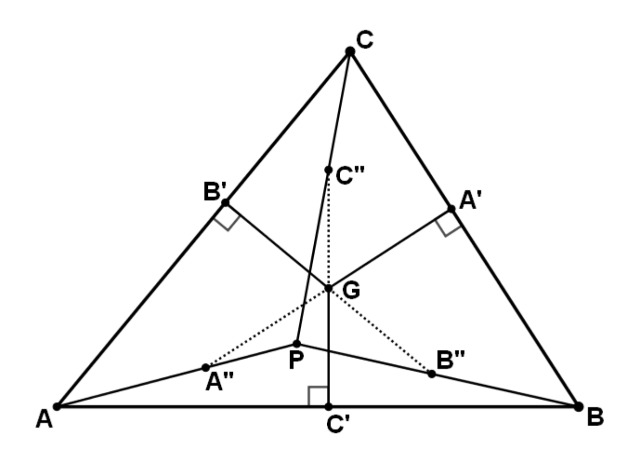
Sean O el circuncentro y G el baricentro de un triángulo ΔABC . Demuestra que GA es perpendicular a OG si y sólo si $b^2 + c^2 = 2a^2$.



Fuente: "Notes on Barycentric Homogeneous Coordinates" (Wong Yan Loi), Página 14

6. Colinealidad de puntos simétricos respecto del baricentro.

Dado un triángulo ΔABC, sean A', B' y C' los pies de las perpendiculares trazadas por el baricentro G en los lados BC, AC y AB respectivamente. Sean A", B" y C" los puntos simétricos respectivamente de A', B' y C' respecto de G. Demuestra que las rectas AA", BB" y CC" son concurrentes.



Donova Mathematical Olympiad 2010

Fuente: "Notes on Barycentric Homogeneous Coordinates" (Wong Yan Loi), Página 15

7. Coordenadas del baricentro de un triángulo.

Demostrar el baricentro O de un triángulo ΔPQR, con $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$ y $R=(r_1,r_2,r_3)$ es

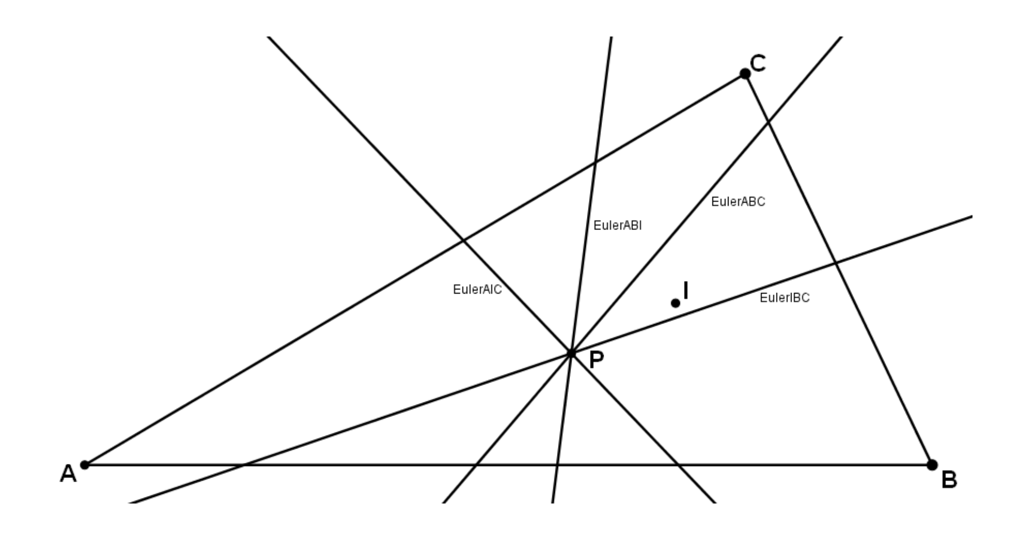
$$O=P+Q+R=\left(p_1+q_1+r_1:p_2+q_2+r_2:p_3+q_3+r_3\right)$$

8. El Punto de Schiffler.

a) Demostrar, mediante notación de Conway, que el baricentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo ΔABC están alineados, en la llamada "Recta de Euler" del triángulo.

b) Determina la ecuación de la recta de Euler y su punto impropio (clasificado como X_{30} en ETC).

c) Demuestra que las rectas de Euler de ΔABI , ΔAIC y ΔIBC son concurrentes. Su punto de corte se denomina "**Punto de Schiffler**" (clasificado como X_{21} en ETC).



d) Demuestra que el Punto de Schiffler también pertenece a la recta de Euler del triángulo ΔABC .

Fuente: "Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos". Angel Montesdeoca. (página 31)

9. Excentros. El punto de Nagel.

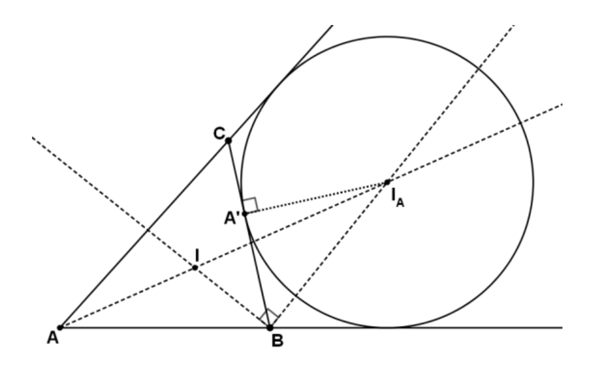
a) Demuestra que las coordenadas baricentricas de las circunferencias exinscritas del triángulo ΔABC son

$$I_A = (-a:b:c)\ ,\ I_B = (a:-b:c)\ ,\ I_C = (a:b:-c)$$

b) Demuestra que los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas con cada uno de los lados del triángulo son

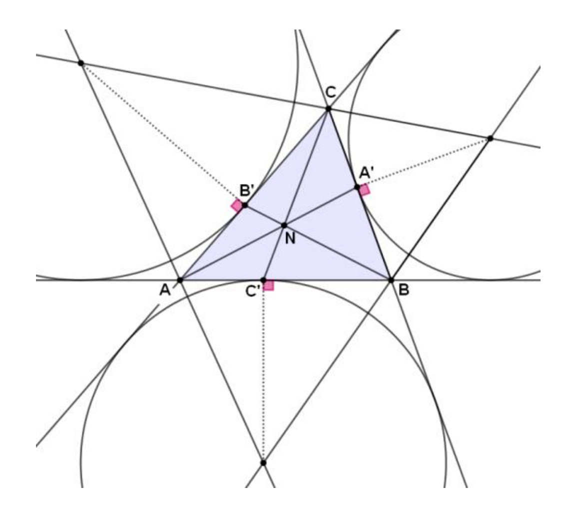
$$A' = (0:s-b:s-c)\ ,\ B' = (s-a:0:s-c)\ ,\ C' = (s-a:s-b:0)$$

Donde $s = (a+b+c)/2$ es el semiperímetro del triángulo de referencia.



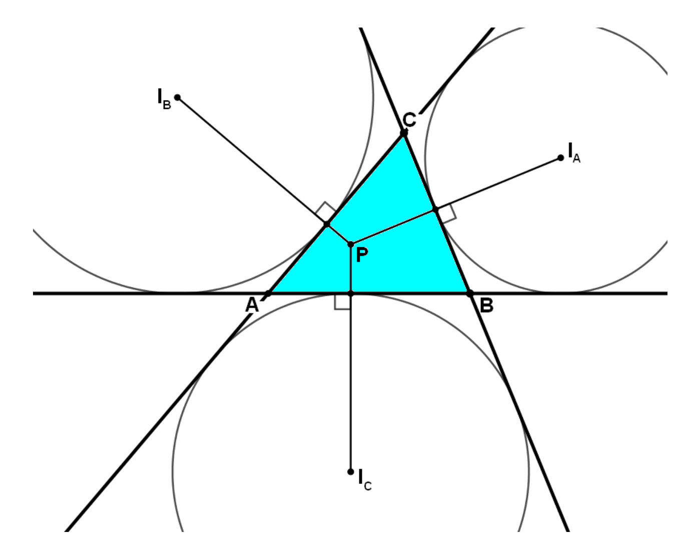
c) Demuestra que las rectas AA', BB' y CC' son las trazas de un punto que se denomina **Punto de Nagel N_a** del triángulo, cuyas coordenadas baricéntricas son

$N_a = (s-a:s-b:s-c)$



10. El punto de Bevan.

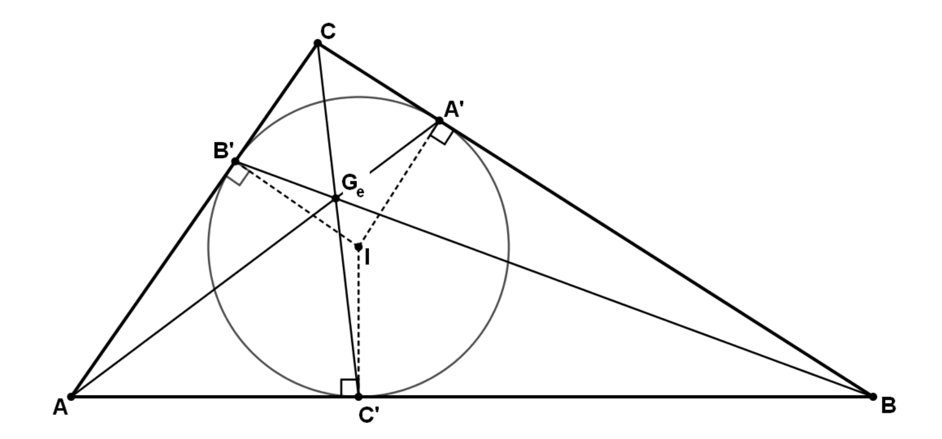
Demostrar que en todo triángulo ΔABC , las perpendiculares a cada lado por los respectivos centros de las tres circunferencias exinscritas son concurrentes. Al punto de corte se le denomina "**Punto de Bevan**" (clasificado como X_{40} en ETC).



Fuente: "Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos". Angel Montesdeoca. (página 47)

11. El punto de Gergonne.

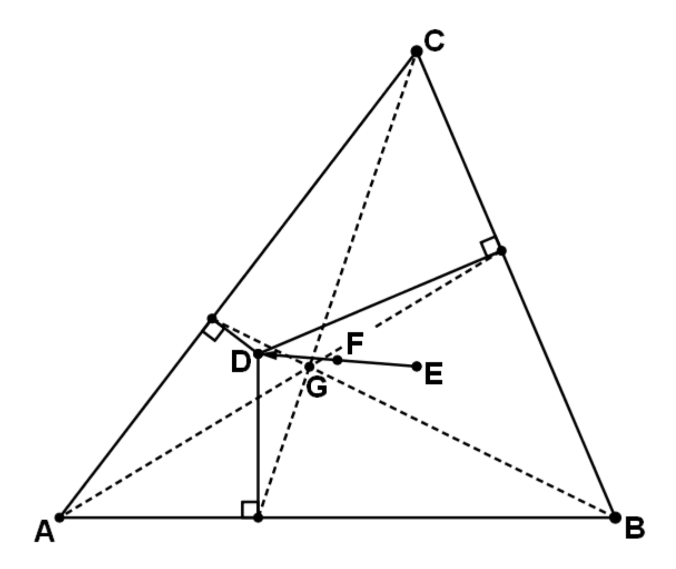
Demuestra que los puntos de tangencia entre el triángulo de referencia ΔABC y su circunferencia inscrita son las trazas de cierto punto llamado **Punto de Gergonne G_e** del triángulo.



12. El punto de Longchamps.

Se define **el punto de Longchamps** como el punto D simétrico del ortocentro E respecto al circuncentro F. Este punto está catalogado como X_{20} en el ETC.

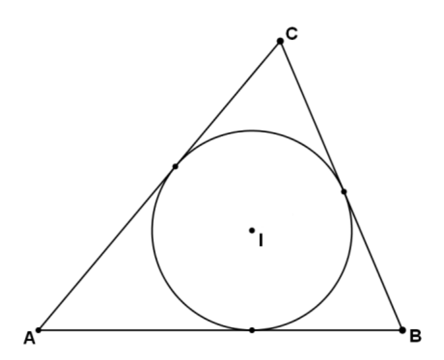
a) Demuestra que el triángulo pedal asociado al punto de Longchamps es el triángulo ceviano de cierto punto G (catalogado como X_{69} en ETC).



b) Está claro que el punto de Longchamps pertenece a la recta de Euler del triángulo. Demuestra que también pertenece a la recta determinada por el incentro y el punto de Gergonne.

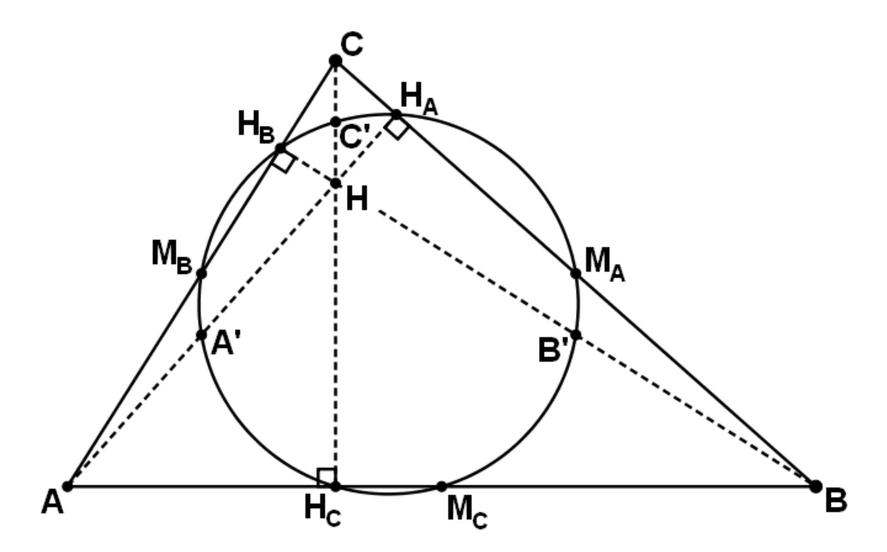
13. Ecuación de la circunferencia inscrita.

Determina la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de referencia.



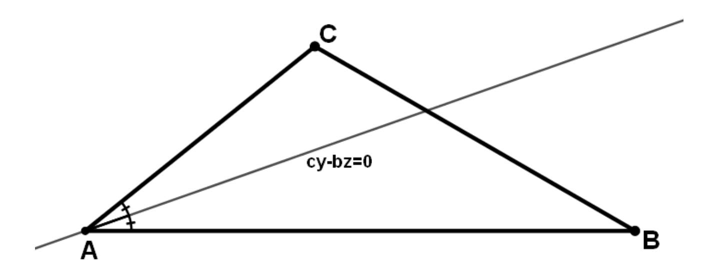
14. La circunferencia de los nueve puntos.

Demuestra que, dado un triángulo ΔABC, los puntos medios M_A, M_B y M_C, los pies H_A, H_B y H_C de las alturas, y los puntos medios A', B' y C' entre cada vértice y el ortocentro H pasan por una misma circunferencia, llamada "**circunferencia de Euler**" o "**la circunferencia de los nueve puntos**". Su centro está catalogado como X_5 en ETC.

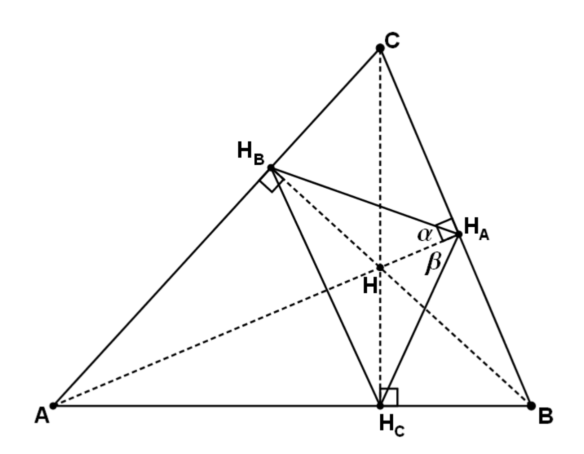


15. Dos ejercicios de determinación de ángulos.

a) Comprueba, mediante las fórmulas de 18.10.3, que efectivamente, la recta $cy - bz = 0$ es la bisectriz interna del triángulo de referencia por el vértice A, es decir, determina respecto de los lados AB y AC ángulos orientados iguales a $A/2$ y $-A/2$.

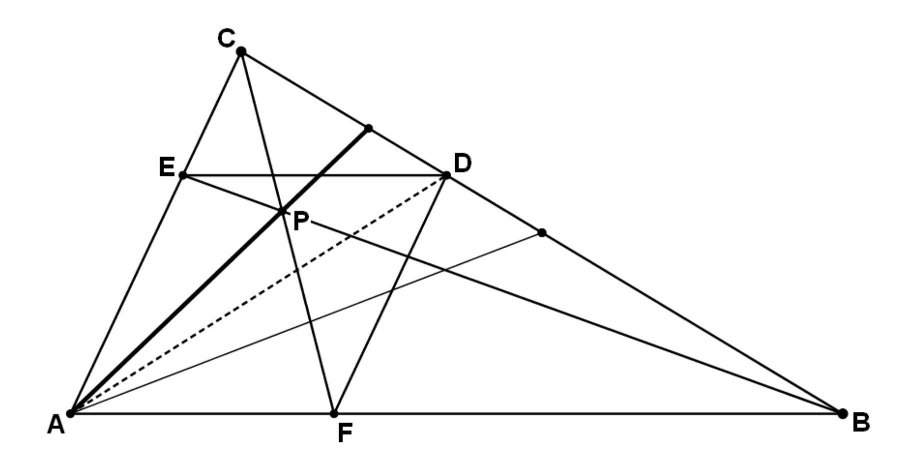


b) Demuestra, determinando los ángulos, que el ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico, es decir, que $\alpha = \beta$ en el esquema siguiente:



16. Simediana mediante dos rectas paralelas.

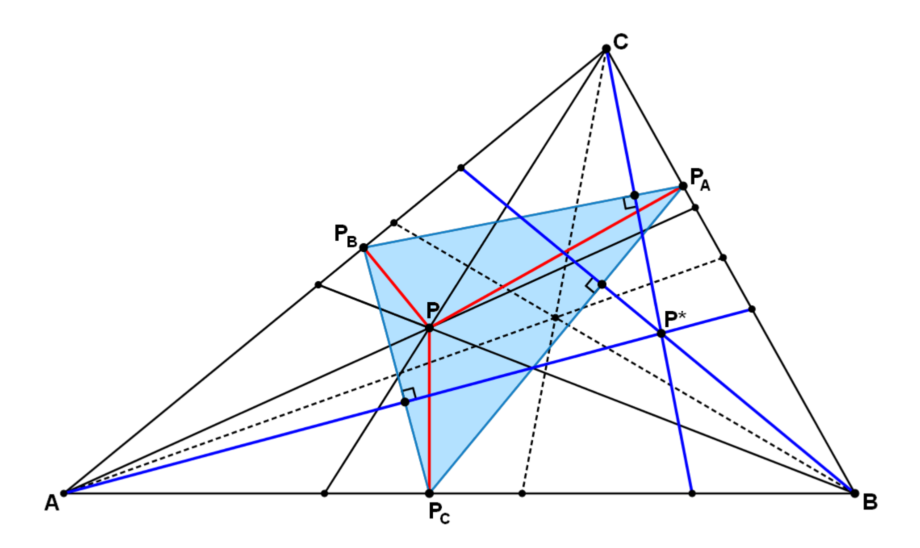
Dado un triángulo ΔABC, sea D el punto de corte entre BC y la bisectriz por A. Sea E el punto de corte de AC con la paralela a AB por D y sea F el punto de corte de AB con la paralela a AC por D. Sea $P = CF \cap BE$. Demuestra que AP es la recta simediana por A.



Fuente: "Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos". Angel Montesdeoca. (página 53)

17. Conjugado isogonal mediante perpendiculares.

Demuestra, de forma sintética y analítica, que las perpendiculares desde los vértices del triángulo ΔABC a los correspondientes lados del triángulo pedal de un punto P concurren en el conjugado isogonal de P.



Fuente: "Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos". Angel Montesdeoca. (página 55)

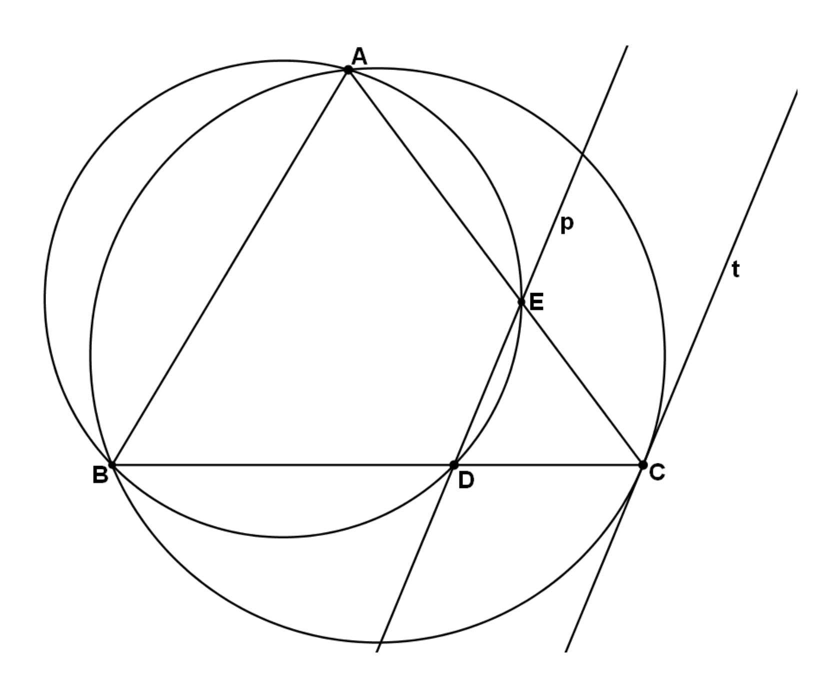
18. La recta de Simson.

Demuestra, mediante coordenadas baricéntricas, que los pedales de un punto P están alineados (en una recta llamada recta de simson) si y sólo si P pertenece a la circunferencia circunscrita.

19. Cuadrilátero cíclico con recta tangente al circuncírculo.

Trazamos la recta tangente t por el vértice C a la circunferencia circunscrita de un triángulo ABC. La recta p, que es paralela a esta recta tangente, corta las rectas BC y AC en los puntos D y E, respectivamente. Demuestra que los puntos A, B, D y E pertenecen a una misma circunferencia.

JBMO Shortlist 2015



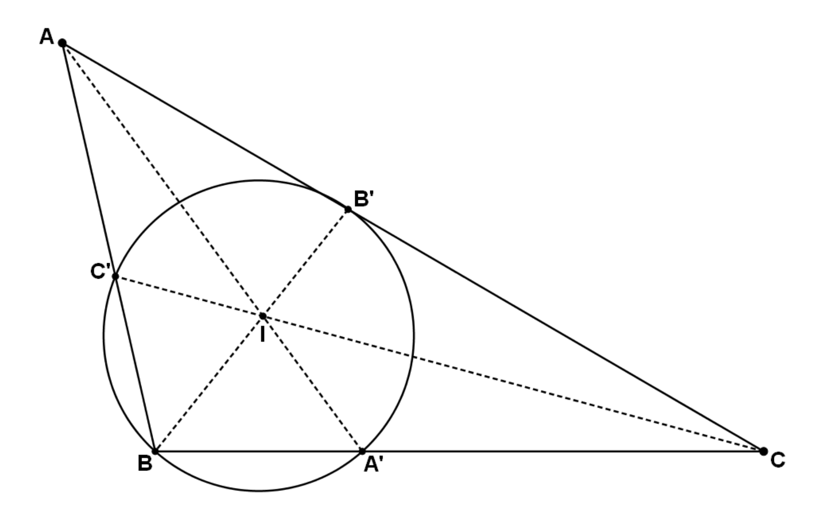
Nota: Este problema se puede resolver sintéticamente y analíticamente.

Fuente: "Notes on Barycentric Homogeneous Coordinates" (Wong Yan Loi), Página 16

20. Cuadrilátero cíclico con las bisectrices de un triángulo.

Los bisectores de $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ cortan los lados de un triángulo ΔABC en A', B' y C', respectivamente. Demuestra que B, A', B' y C' son cocíclicos si y sólo si

$$\frac{BC}{AC+AB}=\frac{AC}{AB+BC}-\frac{AB}{BC+AC}$$

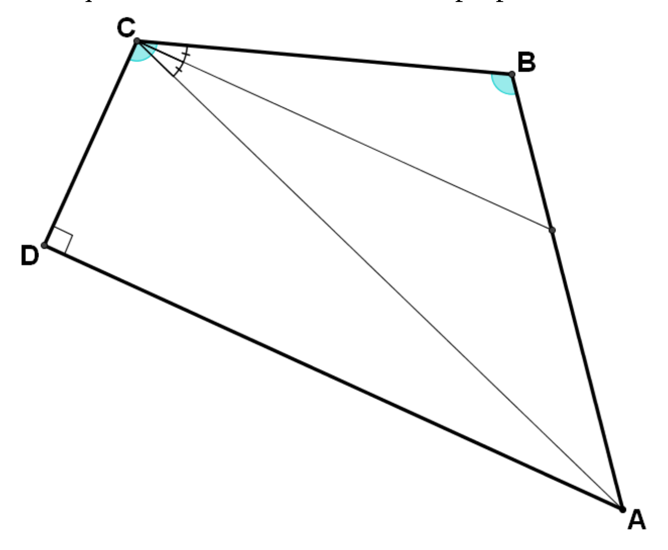


Mongolia 2000

Fuente: "Notes on Barycentric Homogeneous Coordinates" (Wong Yan Loi), Página 16

21. Perpendicularidad en cuadrilátero con bisectriz.

En un cuadrilátero convexo $\lozenge ABCD$ tenemos $\angle B = \angle C$ y $\angle D = 90^o$. Supongamos que $AB = 2CD$. Demuestra que la bisectriz de $\angle ACB$ es perpendicular a CD.

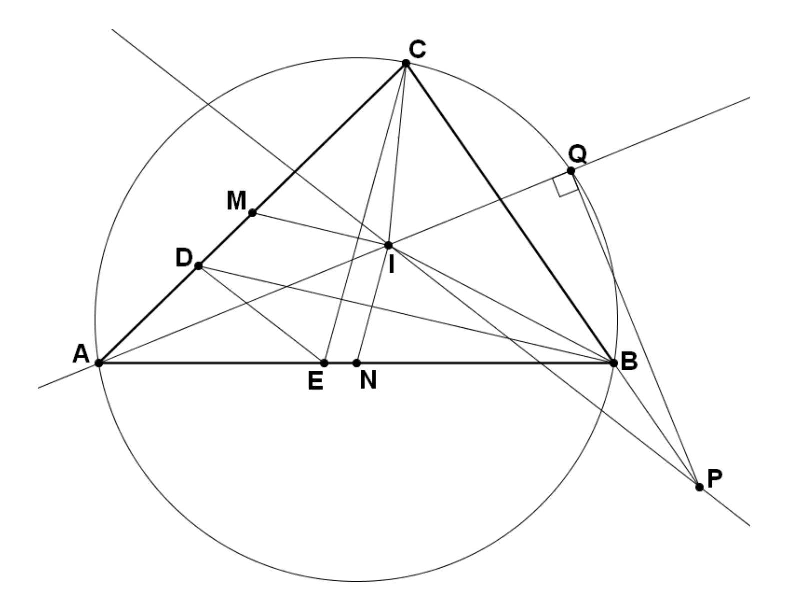


Benelux 2017

Fuente: "Notes on Barycentric Homogeneous Coordinates" (Wong Yan Loi), Página 17

22. Punto en circuncírculo con paralelas e incentro.

En un triángulo ΔABC, $AB > AC$, sea I su incentro, M el punto medio de AC y N el punto medio de AB. La recta por B paralela a IM corta AC en D, y la recta por C paralela a IN corta AB en E. La recta por I paralela a DE corta BC en P. Si Q es el pie de la perpendicular por P en la recta AI, demuestra que Q pertenece a la circunferencia circunscrita de ΔABC.

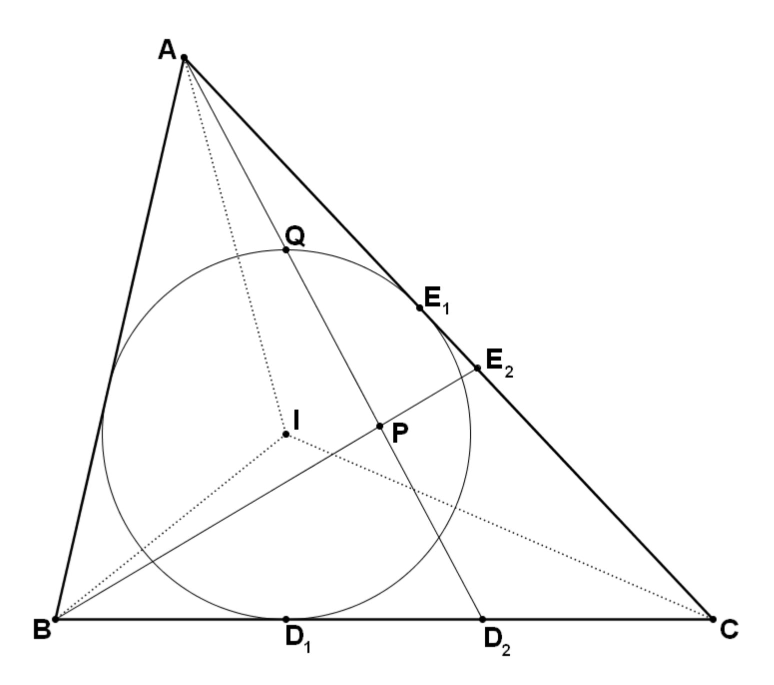


China 2010

Fuente: "Notes on Barycentric Homogeneous Coordinates" (Wong Yan Loi), Página 17

23. Puntos simétricos con los pedales del incentro.

Sea un triángulo ΔABC y ω su incírculo. Denotamos por D_1 y E_1 los puntos en los que ω es tangente a los lados BC y AC, respectivamente. Denotamos por D_2 y E_2 los puntos de los lados BC y AC, respectivamente, tales que $CD_2 = BD_1$ y $CE_2 = AE_1$, y denotamos por P el punto de intersección de los segmentos AD_2 y BE_2. La circunferencia ω corta el segmento AD_2 en dos puntos, el más cercano al vértice A se denota por Q. Demuestra que $AQ = D_2P$.

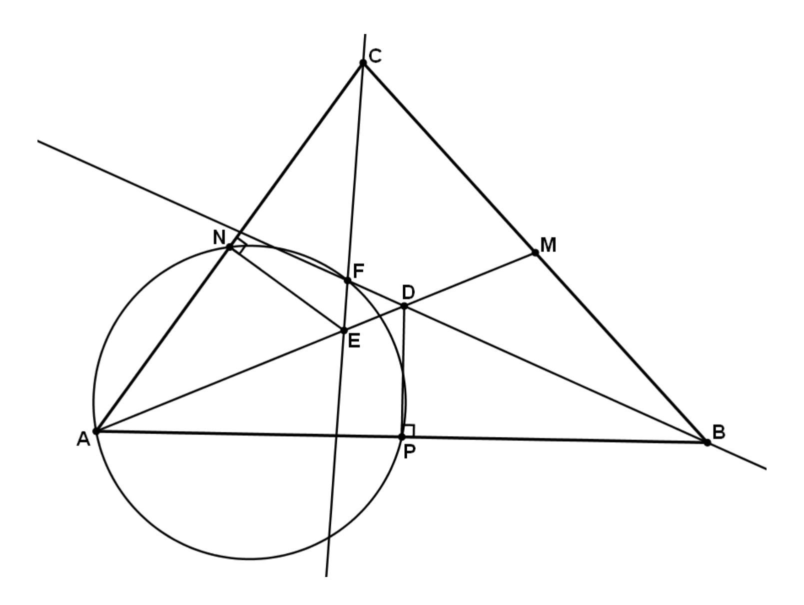


USAMO 2001/2

Fuente: Barycentric Coordinates for the Impatient (Max Schindler, Evan Cheny) Página 5

24. Puntos cocíclicos con mediana y mediatrices.

Sea ΔABC un triángulo agudo y escaleno, y sean M, N y P los puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ cortan la semirrecta AM en los puntos D y E respectivamente, y sea F el punto de corte de las rectas BD y CE, en el interior del triángulo ΔABC. Demuestra que los puntos A, N, F y P pertenecen a una misma circunferencia.



USAMO 2008/2

Fuente: Barycentric Coordinates for the Impatient (Max Schindler, Evan Cheny) Página 6

25. Cuatro ejercicios de triángulos perspectivos.

Ejercicio 1. Sean D, E, F los puntos medios de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, y X, Y, Z los puntos medios de las alturas desde A, B, C, respectivamente. Demostrar que los triángulos XYZ y DEF son perspectivos y hallar el centro de perspectiva.

Ejercicio 2. Sean ABC un triángulo, DEF el triángulo ceviano del punto Q y X, Y, Z los puntos medios de las alturas del triángulo ABC. Hallar el lugar geométrico del punto Q para que los triángulos XYZ y DEF sean perspectivos.

Ejercicio 3. Sean ABC un triángulo, DEF el triángulo medial de ABC, X, Y, Z los puntos medios de las cevianas del punto P. Demostrar que siempre son perspectivos los triángulos XYZ y DEF, y hallar el centro de perspectiva.

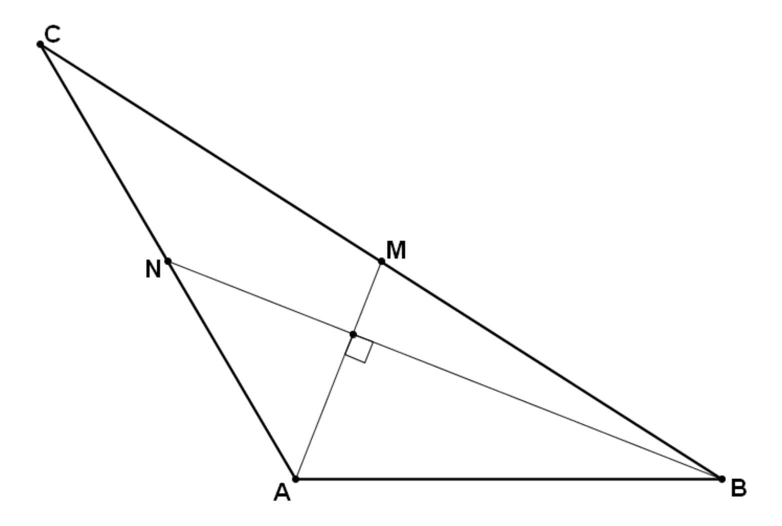
Ejercicio 4. Sean ABC un triángulo, DEF el triángulo ceviano del punto Q, y X, Y, Z los puntos medios de las cevianas del punto P. Hallar el lugar geométrico del punto P para que para que los triángulos XYZ y DEF sean perspectivos.

Fuente: Francisco J. García Capitán

Nota 1: El ejercicio 1 es el ejercicio #2 de este volumen.
Nota 2: No se acompañan soluciones de los ejercicios 2 y 4.

26. Medianas perpendiculares.

En un triángulo ΔABC, las medianas correspondientes a los vértices A y B son perpendiculares. Calcula el valor de c en función de a y b.



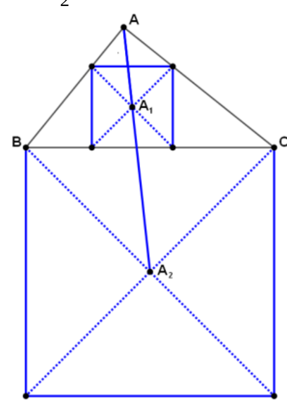
Fuente: Antonius Benedictus en Facebook.

Soluciones

Se ofrecen soluciones completas a todos y cada uno de los ejercicios. Siempre se indica la fuente del enunciado y de la solución. Si no se indica la fuente, son del autor de este libro, Gerard Romo, que con ellas no pretende exhibir erudición: no son necesariamente las mejores, ni las más bellas, ni las óptimas. Seguro que tú encontrarás soluciones alternativas mucho mejores que las mías.
Las referencias numéricas que aparecen en las demostraciones (por ejemplo: 6.3.2 o 11.5.4) indican apartados del libro de teoría, que se puede descargar gratuitamente en el enlace siguiente:
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

1.

Construimos el primer cuadrado y observamos que existe una homotecia centrada en A que convierte el cuadrado inscrito en el cuadrado contruido externamente sobre el lado BC y que pasa el centro buscado A_1 al centro del cuadrado externo A_2, así pues, la recta buscada AA_1 será igual a la recta AA_2.



Las coordenadas de A_2 ya las tenemos calculadas (ver 18.4.7)
$A_2 = \left(-a^2 : S_C + S : S_B + S\right)$, y hacemos lo mismo con los otros dos cuadrados, obteniendo los puntos $B_2 = \left(S_B + S : -b^2 : S_A + S\right)$ y $C_2 = \left(S_C + S : S_A + S : -c^2\right)$
Las rectas buscadas son:

$$AA_2 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -a^2 & S_C + S & S_B + S \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -y(S_B + S) + z(S_C + S) = 0$$

$$BB_2 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ S_B + S & -b^2 & S_A + S \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(S_A + S) - z(S_B + S) = 0$$

$$CC_2 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ S_C + S & S_A + S & -c^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x(S_A + S) + y(S_C + S) = 0$$

Y estas tres rectas son concurrentes, pues

$$\begin{vmatrix} 0 & -(S_B + S) & S_C + S \\ S_A + S & 0 & -(S_B + S) \\ -(S_A + S) & S_C + S & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -(S_B + S) & S_C + S \\ S_A + S & 0 & -(S_B + S) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Fuente de la solución: Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry (Max Schindler, Evan Cheny, July 13, 2012) página 19.

2.

$A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$.

$D=(0:1:1)$, $E=(1:0:1)$, $F=(1:1:0)$.

La altura desde A es la recta que pasa por A y tiene como punto impropio $\left(-a^2:S_B:S_C\right)$ (ver 18.7.1), luego tendrá por ecuación

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a^2 & S_B & S_C \end{vmatrix}=-y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & S_C \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & S_B \end{vmatrix}\Leftrightarrow -S_C y+S_B z=0$$

La recta BC tiene por ecuación $x=0$, luego su punto de corte A' con la altura por A será

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & -S_C & S_B \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\left(\begin{vmatrix} -S_C & S_B \\ 0 & 0 \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} 0 & -S_C \\ 1 & 0 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 0 & S_B \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)=\left(0:-S_C:-S_B\right)=\left(0:S_C:S_B\right)$$

Para calcular el punto medio X entre A y A' aplicamos 18.2.2 teniendo en cuenta que $S_C+S_B=a^2$:

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,0,0)=(a^2:0:0) \\ A'=(0:S_C:S_B) \end{array}\right\}\Rightarrow X=A+A'=(a^2:S_C:S_B)$$

La recta DX será

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_C & S_B \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & S_C \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & S_C \end{vmatrix}\Leftrightarrow$$

$$(S_B-S_C)x+a^2y-a^2z=0\Leftrightarrow (S_B-S_C)x+a^2(y-z)=0\Leftrightarrow$$

$$(c^2-b^2)x+a^2(y-z)=0$$

Análogamente:

$$EY:-b^2x+(a^2-c^2)y+b^2z=0$$

$$FZ:c^2x-c^2y+(b^2-a^2)z=0$$

Y las tres rectas son concurrentes pues el determinante es cero, basta restar a la primera las otras dos:

$$\begin{vmatrix} c^2-b^2 & a^2 & -a^2 \\ -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ c^2 & -c^2 & b^2-a^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ c^2 & -c^2 & b^2-a^2 \end{vmatrix}=0$$

Para hallar las coordenadas del punto de intersección tomamos las dos primeras ecuaciones:

$$DX:(c^2-b^2)x+a^2(y-z)=0$$

$$EY:-b^2x+(a^2-c^2)y+b^2z=0$$

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ c^2-b^2 & a^2 & -a^2 \\ -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} a^2 & -a^2 \\ a^2-c^2 & b^2 \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} c^2-b^2 & -a^2 \\ -b^2 & b^2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c^2-b^2 & a^2 \\ -b^2 & a^2-c^2 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(a^2b^2+a^2(a^2-c^2):a^2b^2-b^2(c^2-b^2):c^2(a^2-b^2+c^2)\right)=$$

$$=\left(a^2 2S_C:b^2 2S_C:c^2 2S_C\right)=\left(a^2:b^2:c^2\right)$$

Es decir, se cortan en el punto simediano del triángulo de referencia.

3.

$N_a=(p-a:p-b:p-c)$ (ver 18.5.3)
$I=(a:b:c)$ (ver 18.1.7)
$G=(1:1:1)$ (ver (18.1.6)

Y, efectivamente, son puntos alineados pues el determinante que forman es cero, pues $F_1=pF_3-F_2$:

$$\begin{vmatrix} p-a & p-b & p-c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Las coordenadas de I suman $2p$, y las coordenadas de G suman 3, luego las convertimos en coodenadas absolutas y aplicamos 18.2.2:

$$I=(a:b:c)=\left(\frac{a}{2p},\frac{b}{2p},\frac{c}{2p}\right)$$

$$G=(1:1:1)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$N_a=(p-a:p-b:p-c)=\left(\frac{p-a}{-p},\frac{p-b}{-p},\frac{p-c}{-p}\right)=\left(-1+\frac{a}{p},-1+\frac{b}{p},-1+\frac{c}{p}\right)$$

Y claramente: $N_a=2I-3G$, luego $\frac{I\,N_a}{N_aG}=\frac{-3}{2}$, tal y como queríamos ver.

4.

Claramente $B'=(1:0:1)$, $C'=(0:1:1)$.

Luego la recta l tendrá por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-x-y+z \Leftrightarrow x+y-z=0$$

La altura por A es la recta que pasa por $A=(1,0,0)$ y por el punto impropio $\left(-a^2:S_C:S_B\right)$, luego tendrá por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ S_C & S_B \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a^2 & S_B \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a^2 & S_C \end{vmatrix} \Leftrightarrow -S_B y+S_C z=0$$

Y su punto de corte D con el lado BC será

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -S_B & S_C \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -S_B & S_C \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_C \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -S_B \end{vmatrix}\right)=(0:-S_C:-S_B)=(0:S_C:S_B)$$

La recta perpendicular a AB por D pasará por D y por el punto impropio $\left(S_B:S_A:-c^2\right)$

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & S_C & S_B \\ S_B & S_A & -c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} S_C & S_B \\ S_A & -c^2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & S_B \\ S_B & -c^2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & S_C \\ S_B & S_A \end{vmatrix}z \Leftrightarrow$$

$$0=(-c^2S_C-S_{AB})x+S_B^2y-S_{BC}z \Leftrightarrow$$

$$0=(c^2S_C+S_{AB})x-S_B^2y+S_{BC}z \Leftrightarrow$$

$$0=S^2x-S_B^2y+S_{BC}z$$

Y su punto de corte F con B'C' será

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ S^2 & -S_B^2 & S_{BC} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -S_B^2 & S_{BC} \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ S^2 & S_{BC} \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S^2 & -S_B^2 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=(S_{BC}-S_B^2:-(S_{BC}+S^2):-S_B^2-S^2)=$$

$$=(S_B^2-S_{BC}:S_{BC}+S^2:S_B^2+S^2)$$

Aplicamos ahora las igualdades de 18.4.2 y 18.4.3:

$$S_B^2-S_{BC}=S_B^2-S_BS_C=S_B(S_B-S_C)=S_B(c^2-b^2)$$

$$S_{BC}+S^2=2S^2-S^2+S_{BC}=2S^2-S_{AB}-S_{BC}-S_{AC}+S_{BC}=$$

$$=S^2-S_{AB}+S^2-S_{AC}=c^2S_C+b^2S_B$$

$$S_B^2+S^2=a^2c^2=c^2(S_B+S_C)$$

$F=\left(S_B(c^2-b^2):c^2S_C+b^2S_B:c^2(S_B+S_C)\right)$

Ahora podemos determinar el punto E pues $DE:EF=-2:1$

La suma de las componentes de F es

$S_B(c^2-b^2)+c^2S_C+b^2S_B+c^2(S_B+S_C)=$

$S_Bc^2-S_Bb^2+c^2S_C+b^2S_B+c^2S_B+c^2S_C=2c^2S_B+2c^2S_C=2c^2(S_B+S_C)=$

$=2a^2c^2$

Luego

$$F=\left(\frac{S_B(c^2-b^2)}{2a^2c^2},\frac{c^2S_C+b^2S_B}{2a^2c^2},\frac{c^2(S_B+S_C)}{2a^2c^2}\right)$$

La suma de las componentes de D es $S_C+S_B=a^2$, luego

$$D=(0:S_C:S_B)=\left(0,\frac{S_C}{a^2},\frac{S_B}{a^2}\right)$$

$$E=1D-2F=\left(0,\frac{S_C}{a^2},\frac{S_B}{a^2}\right)-2\left(\frac{S_B(c^2-b^2)}{2a^2c^2},\frac{c^2S_C+b^2S_B}{2a^2c^2},\frac{c^2(S_B+S_C)}{2a^2c^2}\right)=$$

$$=\left(-2\frac{S_B(c^2-b^2)}{2a^2c^2}:\frac{S_C}{a^2}-2\frac{c^2S_C+b^2S_B}{2a^2c^2}:\frac{S_B}{a^2}-2\frac{c^2(S_B+S_C)}{2a^2c^2}\right)$$

$$-2\frac{S_B(c^2-b^2)}{2a^2c^2}=\frac{-S_B(c^2-b^2)}{a^2c^2}$$

$$\frac{S_C}{a^2}-2\frac{c^2S_C+b^2S_B}{2a^2c^2}=\frac{c^2S_C-c^2S_C-b^2S_B}{a^2c^2}=\frac{-b^2S_B}{a^2c^2}$$

$$\frac{S_B}{a^2}-2\frac{c^2(S_B+S_C)}{2a^2c^2}=\frac{S_B}{a^2}-\frac{S_B+S_C}{a^2}==\frac{S_B-S_B-S_C}{a^2}=\frac{-S_C}{a^2}$$

$$E=\left(\frac{-S_B(c^2-b^2)}{a^2c^2}:\frac{-b^2S_B}{a^2c^2}:\frac{-S_C}{a^2}\right)=\left(S_B(c^2-b^2):b^2S_B:c^2S_C\right)$$

La recta AE será

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ S_B(c^2-b^2) & b^2S_B & c^2S_C \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b^2S_B & c^2S_C \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ S_B(c^2-b^2) & c^2S_C \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ S_B(c^2-b^2) & b^2S_B \end{vmatrix}z\Leftrightarrow$$

$0=-c^2S_Cy+b^2S_Bz$

En 18.4.4 hemos visto que el circuncentro tiene coordenadas $O=\left(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C\right)$, y claramente pertenece a la recta AE, pues $-c^2S_Cb^2S_B+b^2S_Bc^2S_BS_C=0$.

5.

En coordenadas baricéntricas: $O=\left(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C\right)$ y $G=(1,1,1)$

Recta GA:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\Leftrightarrow y-z=0$$

Punto impropio de la recta GA: $(2,-1,-1)$

Recta OG:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & 1\\ b^2S_B & c^2S_C\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1 & 1\\ a^2S_A & c^2S_C\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1 & 1\\ a^2S_A & b^2S_B\end{vmatrix}\Leftrightarrow$$

$$0=(c^2S_C-b^2S_B)x-(c^2S_C-a^2S_A)y+(b^2S_B-a^2S_A)z$$

Punto impropio de la recta OG:

$$(2a^2S_A-b^2S_B-c^2S_C,2b^2S_B-a^2S_A-c^2S_C,2c^2S_C-a^2S_A-b^2S_B)$$

$$GA\perp OG\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{OG}=0\Leftrightarrow$$

$$0=a^2\left[(-1)(2b^2S_B-a^2S_A-c^2S_C)+(-1)(2c^2S_C-a^2S_A-b^2S_B)\right]+$$

$$+b^2\left[2(2c^2S_C-a^2S_A-b^2S_B)+(-1)(2a^2S_A-b^2S_B-c^2S_C)\right]+$$

$$+c^2\left[(-1)(2a^2S_A-b^2S_B-c^2S_C)+2(2b^2S_B-a^2S_A-c^2S_C)\right]=$$

$$=a^2\left[-b^2S_B+2a^2S_A-c^2S_C\right]+b^2\left[5c^2S_C-4a^2S_A-b^2S_B\right]+c^2\left[-4a^2S_A+5b^2S_B-c^2S_C\right]=$$

$$=-a^2b^2S_B+2a^4S_A-a^2c^2S_C+5b^2c^2S_C-4a^2b^2S_A-b^4S_B-4a^2c^2S_A+5b^2c^2S_B-c^4S_C=$$

$$=S_A\left(2a^4-4a^2b^2-4a^2c^2\right)+S_B\left(-a^2b^2-b^4+5b^2c^2\right)+S_C\left(-a^2c^2+5b^2c^2-c^4\right)$$

$$=-2a^2S_A\left(-a^2+2b^2+2c^2\right)-b^2S_B\left(a^2+b^2-5c^2\right)-c^2S_C\left(a^2+c^2-5b^2\right)=$$

$$=-2a^2S_A\left(2S_A+b^2+c^2\right)-b^2S_B\left(2S_C-4c^2\right)-c^2S_C\left(2S_B-4b^2\right)=$$

$$=-4a^2S_A^2-2a^2S_A\left(b^2+c^2\right)-2b^2S_BS_C+4b^2c^2S_B-2c^2S_CS_B+4b^2c^2S_C=$$

$$4b^2c^2S_B+4b^2c^2S_C=4b^2c^2\left(S_B+S_C\right)=4a^2b^2c^2$$

$$-2b^2S_BS_C-2c^2S_BS_C=-2S_BS_C\left(b^2+c^2\right)$$

$$=-4a^2S_A^2-2a^2S_A\left(b^2+c^2\right)-2S_BS_C\left(b^2+c^2\right)+4a^2b^2c^2=$$

$$=-4a^2S_A^2-2(b^2+c^2)(a^2S_A+S_BS_C)+4a^2b^2c^2=$$

$$=-4a^2(S_A^2-b^2c^2)-2(b^2+c^2)(a^2S_A+S_BS_C)=$$

$$S_A^2-b^2c^2=-S^2$$

$$a^2S_A+S_BS_C=S^2$$

$$=2S^2(2a^2-b^2-c^2)\Leftrightarrow 2a^2-b^2-c^2=0\Leftrightarrow 2a^2=b^2+c^2$$

6.

Sabemos que $G=(1,1,1)$ y que las rectas perpendiculares a AB tienen como punto impropio $(S_B:S_A:-c^2)$. Luego la recta perpendicular a G por AB será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ S_B & S_A & -c^2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_A & -c^2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_B & -c^2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_B & S_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$0=(-c^2-S_A)x-(-c^2-S_B)y+(S_A-S_B)z$$

El punto C' es la intersección de la recta $AB: z=0$ y la recta anterior:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -c^2-S_A & S_B+c^2 & S_A-S_B \end{vmatrix} =$$

$$=\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ S_B+c^2 & S_A-S_B \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -c^2-S_A & S_A-S_B \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -c^2-S_A & S_B+c^2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$=\left(S_B+c^2 : c^2+S_A : 0\right)$$

Determinamos ahora el simétrico C'' aplicando 18.2.3:

$$C'=\left(S_B+c^2:c^2+S_A:0\right) \Rightarrow \Sigma = S_B+c^2+c^2+S_A+0 = S_A+S_B+2c^2 = c^2+2c^2 = 3c^2$$

$$G=(1,1,1)=\left(c^2:c^2:c^2\right) \Rightarrow \Sigma = 3c^2$$

$$C'=2G-C'=\left(2c^2-S_B-c^2:2c^2-S_A-c^2:2c^2\right)=\left(c^2-S_B:c^2-S_A:2c^2\right)=$$

$$=\left(S_A+S_B-S_B:S_A+S_B-S_A:2c^2\right)=\left(S_A:S_B:2c^2\right)$$

Calculamos la recta CC'':

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ S_A & S_B & 2c^2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ S_B & 2c^2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ S_A & 2c^2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ S_A & S_B \end{vmatrix} =$$

$$=-S_Bx-(-S_A)y \Leftrightarrow 0=S_Ay-S_Bx$$

De la misma forma determinamos la recta BB'': $S_Cx-S_Az=0$ y la recta AA'': $S_Bz-S_Cy=0$

Y estas tres rectas son concurrentes. En efecto:

$$0=\begin{vmatrix} 0 & -S_C & S_B \\ S_C & 0 & -S_A \\ -S_B & S_A & 0 \end{vmatrix} = -S_C\begin{vmatrix} -S_C & S_B \\ S_A & 0 \end{vmatrix} - S_B\begin{vmatrix} -S_C & S_B \\ 0 & S_A \end{vmatrix} = -S_CS_AS_B+S_BS_AS_C=0$$

7.

Aplicando 18.2.2, el punto medio M entre P y Q es

$M = P + Q = (p_1 + q_1 : p_2 + q_2 : p_3 + q_3)$

Y comprobamos que O está en la recta RM:

$$\begin{vmatrix} p_1+q_1+r_1 & p_2+q_2+r_2 & p_3+q_3+r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1+q_1 & p_2+q_2 & p_3+q_3 \end{vmatrix} \underset{F_1 \to F_1 - F_2 - F_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1+q_1 & p_2+q_2 & p_3+q_3 \end{vmatrix} = 0$$

De la misma forma, el punto medio N entre P y R es

$N = P + R = (p_1 + r_1 : p_2 + r_2 : p_3 + r_3)$

Y comprobamos que O está en la recta QN:

$$\begin{vmatrix} p_1+q_1+r_1 & p_2+q_2+r_2 & p_3+q_3+r_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1+r_1 & p_2+r_2 & p_3+r_3 \end{vmatrix} \underset{F_1 \to F_1 - F_2 - F_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1+r_1 & p_2+r_2 & p_3+r_3 \end{vmatrix} = 0$$

Así pues, O es la intersección de las medianas del triángulo, y por tanto es su baricentro.

8.

a)

Baricentro: $B=(1:1:1)$

Circuncentro: $C=(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C)$

Ortocentro: $O=(S_{BC}:S_{AC}:S_{AB})$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \\ S_{BC} & S_{AC} & S_{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2S_A & b^2S_B-a^2S_A & c^2S_C-a^2S_A \\ S_{BC} & S_{AC}-S_{BC} & S_{AB}-S_{BC} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2S_A & S_{BC}-S_{AC} & S_{BC}-S_{AB} \\ S_{BC} & S_{AC}-S_{BC} & S_{AB}-S_{BC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2S_A+S_{BC} & 0 & 0 \\ S_{BC} & S_{AC}-S_{BC} & S_{AB}-S_{BC} \end{vmatrix} = 0$$

b)

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ S_{BC} & S_{AC} & S_{AB} \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_{AC} & S_{AB} \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_{BC} & S_{AB} \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_{BC} & S_{AC} \end{vmatrix} =$$

$$= S_A(S_B-S_C)x + S_B(S_C-S_A)y + S_C(S_A-S_B)z$$

Y su punto impropio será

$$\left(S_B(S_C-S_A)-S_C(S_A-S_B):S_C(S_A-S_B)-S_A(S_B-S_C):S_A(S_B-S_C)-S_B(S_C-S_A)\right)=$$
$$\left(S_{AB}+S_{AC}-2S_{BC}:S_{BC}+S_{AB}-2S_{AC}:S_{AC}+S_{BC}-2S_{AB}\right)$$

c)

Para determinar la Recta de Euler del triángulo ΔABI determinamos su baricentro y su ortocentro.

Baricentro de ΔABI :

$$A=(1,0,0),\ B=(0,1,0),\ I=(a:b:c)=\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right)$$

Por 18.3.11 o el ejercicio anterior, su baricentro será

$$O=A+B+I=\left(1+\frac{a}{a+b+c}:1+\frac{b}{a+b+c}:\frac{c}{a+b+c}\right)=$$
$$\left(\frac{2a+b+c}{a+b+c}:\frac{a+2b+c}{a+b+c}:\frac{c}{a+b+c}\right)=\left(2a+b+c:a+2b+c:c\right)$$

Ortocentro de ΔABI :

Altura por I: Será la recta que pasa por $I=(a:b:c)$ y el punto impropio $\left(S_B:S_A:-c^2\right)$ de las perpendiculares a AB:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ S_B & S_A & -c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c \\ S_A & -c^2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} a & c \\ S_B & -c^2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a & b \\ S_B & S_A \end{vmatrix}z=$$

$$=(-bc^2-cS_A)x-(-ac^2-cS_B)y+(aS_A-bS_B)z \Leftrightarrow$$

$$0=c(bc+S_A)x-c(ac+S_B)y+(bS_B-aS_A)z$$

Altura por A: Será la recta que pasa por $A=(1,0,0)$ y el punto impropio de las perpendiculares a BI, que tenemos que determinar:

Recta BI: $0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & c \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}z=cx-az$

Punto impropio de la recta BI: $(a:-a-c:c)$

Punto impropio de las rectas perpendiculares a BI:

$$\left((-a-c)S_B-cS_C:cS_C-aS_A:aS_A-(-a-c)S_B\right)=(*)$$

$$(-a-c)S_B-cS_C=-aS_B-cS_B-cS_C=-aS_B-c(S_B+S_C)=-aS_B-ca^2=$$

$$=-a(S_B+ca)$$

$$aS_A-(-a-c)S_B=aS_A+aS_B+cS_B=a(S_A+S_B)+cS_B=ac^2+cS_B=$$

$$=c(ac+S_B)$$

$$(*)=\left(-a(S_B+ca):cS_C-aS_A:c(ac+S_B)\right)$$

Luego la ecuación de la altura por A será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -a(S_B+ca) & cS_C-aS_A & c(ac+S_B) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ cS_C-aS_A & c(ac+S_B) \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a(S_B+ca) & c(ac+S_B) \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a(S_B+ca) & cS_C-aS_A \end{vmatrix}z=$$

$$=-c(ac+S_B)y+(cS_C-aS_A)z \Leftrightarrow 0=c(ac+S_B)y+(aS_A-cS_C)z$$

El ortocentro será la intersección de la altura por I y la altura por A:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ c(bc+S_A) & -c(ac+S_B) & bS_B-aS_A \\ 0 & c(ac+S_B) & aS_A-cS_C \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix} -c(ac+S_B) & bS_B-aS_A \\ c(ac+S_B) & aS_A-cS_C \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} c(bc+S_A) & bS_B-aS_A \\ 0 & aS_A-cS_C \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c(bc+S_A) & -c(ac+S_B) \\ 0 & c(ac+S_B) \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} -c(ac+S_B)(aS_A-cS_C)-c(ac+S_B)(bS_B-aS_A): \\ -c(bc+S_A)(aS_A-cS_C): \\ c(bc+S_A)c(ac+S_B) \end{pmatrix}=$$

$$=\left(-c(ac+S_B)(bS_B-cS_C):-c(bc+S_A)(aS_A-cS_C):c^2(bc+S_A)(ac+S_B)\right)=$$

$$=\left((ac+S_B)(bS_B-cS_C):(bc+S_A)(aS_A-cS_C):-c(bc+S_A)(ac+S_B)\right)=(*)$$

Simplificando (con ayuda de Mathematica):

$$4(ac+S_B)(bS_B-cS_C)=(2ac+a^2+c^2-b^2)(b(a^2+c^2-b^2)-c(a^2+b^2-c^2))=$$
$$=(b-c)(a-b-c)(a-b+c)(a+b+c)^2$$
$$4(bc+S_A)(aS_A-cS_C)=(2bc+b^2+c^2-a^2)(a(b^2+c^2-a^2)-c(a^2+b^2-c^2)=$$
$$=(a-c)(a-b-c)(a-b+c)(a+b+c)^2$$
$$-4c(bc+S_A)(ac+S_B)=-c(2bc+b^2+c^2-a^2)(2ac+a^2+c^2-b^2)=$$
$$=c(a-b-c)(a-b+c)(a+b+c)^2$$
$$(*)=\left(b-c:a-c:c\right)$$

Y la Recta de Euler del triángulo ΔABI será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a+b+c & a+2b+c & c \\ b-c & a-c & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a+2c & 2b+2c & 0 \\ b-c & a-c & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a+c & b+c & 0 \\ b-c & a-c & c \end{vmatrix}\Leftrightarrow$$
$$0=\begin{vmatrix} b+c & 0 \\ a-c & c \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} a+c & 0 \\ b-c & c \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a+c & b+c \\ b-c & a-c \end{vmatrix}z\Leftrightarrow$$
$$0=c(b+c)x-c(a+c)y+(a^2-b^2)z$$

De la misma manera se determinan las rectas de Euler de los otros dos triángulos:

$$\Delta IBC:(b^2-c^2)x+a(c+a)y-a(b+a)z=0$$
$$\Delta AIC:-b(c+b)x+(c^2-a^2)y+b(a+b)z=0$$

Determinemos el punto de corte de la segunda y tercera:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ c(b+c) & -c(a+c) & a^2-b^2 \\ b^2-c^2 & a(c+a) & -a(b+a) \end{vmatrix}=$$
$$=\left(\begin{vmatrix} -c(a+c) & a^2-b^2 \\ a(c+a) & -a(b+a) \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} c(b+c) & a^2-b^2 \\ b^2-c^2 & -a(b+a) \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c(b+c) & -c(a+c) \\ b^2-c^2 & a(c+a) \end{vmatrix}\right)=(*)$$

$$c(a+c)a(b+a)-a(c+a)(a^2-b^2)=-a(a+b)(a-b-c)(a+c)$$
$$-(c(b+c)a(b+a)-(b^2-c^2)(a^2-b^2))=b(a+b)(a-b+c)(b+c)$$
$$c(b+c)a(c+a)+c(a+c)(b^2-c^2)=(a+b-c)c(a+c)(b+c)$$

$$(**)=\left(\frac{a(b+c-a)}{b+c}:\frac{b(a+c-b)}{a+c}:\frac{c(a+b-c)}{a+b}\right)$$

Veamos que este punto pertenece también a la recta de Euler de

$$\Delta AIC:-b(c+b)x+(c^2-a^2)y+b(a+b)z=0$$
$$-b(c+b)\frac{a(b+c-a)}{b+c}+(c^2-a^2)\frac{b(a+c-b)}{a+c}+b(a+b)\frac{c(a+b-c)}{a+b}=$$
$$=-ba(b+c-a)+(c-a)b(a+c-b)+bc(a+b-c)=0$$

d) Mediante Mathematica se comprueba fácilmente que el punto anterior satisface la ecuación de la recta de Euler del triángulo inicial:

```
Untitled-1 *

In[161]:= SA = (b ^ 2 + c ^ 2 - a ^ 2) / 2;
          SB = (a ^ 2 + c ^ 2 - b ^ 2) / 2;
          SC = (a ^ 2 + b ^ 2 - c ^ 2) / 2;
          x = a (b + c - a) / (b + c);
          y = b (a + c - b) / (a + c);
          z = c (a + b - c) / (a + b);
          equacion = SA (SB - SC) x + SB (SC - SA) y + SC (SA - SB) z;
          Simplify[equacion]

Out[168]= 0

100%
```

9.

El incentro tiene coordenadas baricéntricas $I=(a:b:c)$ (18.1.8)

La bisectriz interna por A será

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & c \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix}z=-cy+bz$$

La bisectriz interna por B será

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & c \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}z=cx-az$$

Y su vector de desplazamiento asociado será $v=(a:-a-c:c)$

La bisectriz externa por B será perpendicular a la bisectriz interna por B, y (aplicando 18.7.5) tendrá como punto impropio:

$$\left((-a-c)S_B-cS_C:cS_C-aS_A:aS_A-(-a-c)S_B\right)=$$
$$\left((a+c)S_B+cS_C:aS_A-cS_C:-aS_A-(a+c)S_B\right)=(*)$$
$$(a+c)S_B+cS=aS_B+cS_B+cS_C=aS_B+c\left(S_B+S_C\right)=aS_B+ca^2=a(S_B+ac)=$$
$$=2as(s-b)$$
$$aS_A-cS_C=-2s(b-s)(c-a)$$
$$-aS_A-(a+c)S_B=-aS_A-aS_B-cS_B=-a(S_A+S_B)-cS_B=-ac^2-cS_B=$$
$$=-c(ac+S_B)=-2cs(s-b)$$
$$(*)=\left(2as(s-b):-2s(b-s)(c-a):-2cs(s-b)\right)=$$
$$\left(a(s-b):-(b-s)(c-a):-c(s-b)\right)=\left(a:c-a:-c\right)$$

Luego su ecuación será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ a & c-a & -c \end{vmatrix}==\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c-a & -c \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & -c \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & c-a \end{vmatrix}z=-cx-az\Leftrightarrow$$
$$0=cx+az$$

El punto A-excentro de la circunferencia A-exinscrita del triángulo, será el punto de intersección de la bisectriz interna por A y la bisectriz externa por B:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} -c & b \\ 0 & a \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & a \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix}\right)=\left(-ac:bc:c^2\right)=\left(-a:b:c\right)$$

b)

Las rectas perpendiculares al lado BC del triángulo tendrán como punto impropio $\left(-a^2:S_C:S_B\right)$, luego la perpendicular al lado BC por el A-excentro será

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ -a & b & c \\ -a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c \\ S_C & S_B \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} -a & c \\ -a^2 & S_B \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} -a & b \\ -a^2 & S_C \end{vmatrix}z \Leftrightarrow (**)$$

$$\begin{vmatrix} b & c \\ S_C & S_B \end{vmatrix}=bS_B-cS_C=2s(a-s)(b-c)$$

$$-\begin{vmatrix} -a & c \\ -a^2 & S_B \end{vmatrix}=-(-aS_B+a^2c)=-a\left(ac-S_B\right)=-2a(s-c)(s-a)$$

$$\begin{vmatrix} -a & b \\ -a^2 & S_C \end{vmatrix}=-aS_C+a^2b=a(ab-S_C)=2a(s-a)(s-b)$$

$$(**)\Leftrightarrow 2s(a-s)(b-c)x-2a(s-c)(s-a)y+2a(s-a)(s-b)z=0 \Leftrightarrow$$

$$s(b-c)x+a(s-c)y-a(s-b)z=0$$

Y su intersección con el lado BC será

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ s(b-c) & a(s-c) & a(b-s) \end{vmatrix}=\left(0:-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ s(b-c) & a(b-s) \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ s(b-c) & a(s-c) \end{vmatrix}\right)=$$

$$\left(0:-a(b-s):a(s-c)\right)=\left(0:s-b:s-c\right)$$

c)

Puesto que $A'=(0:s-b:s-c)$, $B'=(s-a:0:s-c)$ y $C'=(s-a:s-b:0)$, es una deducción directa del teorema de Ceva con coordenadas baricéntricas (18.5.1b)

10.

Hemos visto en el problema anterior que $I_A = (-a : b : c)$, y las perpendiculares al lado BC tienen como punto impropio $\left(-a^2 : S_C : S_B\right)$, luego la perpendicular por I_A al lado BC tendrá por ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -a & b & c \\ -a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ S_C & S_B \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -a & c \\ -a^2 & S_B \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -a & b \\ -a^2 & S_C \end{vmatrix} z =$$

$$(bS_B - cS_C)x - (-aS_B + a^2c)y + (-aS_C + a^2b)z =$$

$$(bS_B - cS_C)x + (aS_B - a^2c)y + (a^2b - aS_C)z$$

Aplicando las igualdades siguientes (ver 18.4.3) en la ecuación de la recta

$$bS_B - cS_C = 2s(a-s)(b-c)$$
$$aS_B - a^2c = a(S_B - ac) = -a2(s-c)(s-a)$$
$$a^2b - aS_C = a(ab - S_C) = a2(s-a)(s-b)$$

Llegamos a la ecuación

$$0 = 2s(a-s)(b-c)x - 2a(s-c)(s-a)y + 2a(s-a)(s-b)z \Leftrightarrow$$
$$0 = s(c-b)x + a(c-s)y + a(s-b)z$$

De la misma manera deducimos las otras dos perpendiculares:

$$-b(s-c)x + (c-a)sy + b(s-a)z = 0$$
$$c(s-b)x - c(s-a)y + (a-b)sz = 0$$

Estas tres rectas son concurrentes pues el determinante de sus coeficientes es cero:

$$\begin{vmatrix} s(c-b) & a(c-s) & a(s-b) \\ -b(s-c) & (c-a)s & b(s-a) \\ c(s-b) & -c(s-a) & (a-b)s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sc-sb & ac-as & as-ab \\ bc-bs & cs-as & bs-ba \\ sc-bc & ac-cs & as-bs \end{vmatrix} =$$

$$\overset{F_1 \to F_1 - F_2 + F_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ bc-bs & cs-as & bs-ba \\ sc-bc & ac-cs & as-bs \end{vmatrix} = 0$$

Este punto de corte lo podemos determinar como intersección de las dos primeras rectas:

$$P=\begin{vmatrix} x & y & z \\ s(c-b) & a(c-s) & a(s-b) \\ -b(s-c) & (c-a)s & b(s-a) \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix} a(c-s) & a(s-b) \\ (c-a)s & b(s-a) \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} s(c-b) & a(s-b) \\ -b(s-c) & b(s-a) \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} s(c-b) & a(c-s) \\ -b(s-c) & (c-a)s \end{vmatrix}\right)$$

Acontinuación copio de la página 47 del documento "**Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos**" de Angel Montesdeoca la simplificación de la expresión de dicho punto:

La primera coordenada es

$$a(c-s)b(s-a)-s(c-a)a(s-b)=$$

Que se puede poner de la forma

$$a(b(s-c)(s-a)-as(s-b)+cs(s-b))$$

y si se le suma y resta la expresión $ac(s-b)$ queda como

$$a(b(s-c)(s-a)-as(s-b)+ac(s-b)-ac(s-b)+cs(s-b))$$

o equivalentemente:

$$a(b(s-c)(s-a)-a(s-b)(s-c)+c(s-b)(s-a))$$

Las otras dos componentes se obtienen permutando ésta cíclicamente. En definitiva, el punto encontrado tiene por coordenadas

$$B_v=\left(-\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}:\frac{a}{s-a}-\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}:\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}-\frac{c}{s-c}\right)$$

Conocido como **punto de Bevan** (clasificado como X_{40} en ETC). Este punto es el circuncentro del triángulo excentral.

11.

Sea A', B' y C' los puntos de tangencia entre el triángulo de referencia ΔABC y su circunferencia inscrita. En 11.3.11 se comprueba que
$\overline{AB'} = \overline{AC'} = p - a$, $\overline{BA'} = \overline{BC'} = p - b$ y $\overline{CA'} = \overline{CB'} = p - c$, donde p es el semiperímetro del triángulo.
Luego, aplicando 18.2.2, $A' = (0 : p - c : p - b)$, $B' = (p - c : 0 : p - a)$ y $C' = (p - b : p - a : 0)$.

Estos tres puntos se pueden reescribir de la siguiente manera:
$A' = (0 : p - c : p - b) = \left(0 : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}\right)$, $B' = (p - c : 0 : p - a) = \left(\frac{1}{p-a} : 0 : \frac{1}{p-c}\right)$ y
$C' = (p - b : p - a : 0) = \left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : 0\right)$
Y por tanto podemos aplicar 18.5.1b para deducir que son las trazas del punto

$$P = \left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}\right)$$

Este punto es conocido como el **Punto de Gergonne G_e** del triángulo.

12.

Ortocentro: $E=(S_{BC}:S_{AC}:S_{AB})$, con suma S^2.

Circuncentro: $F=(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C)$, con suma $2S^2$.

Luego $E=(2S_{BC}:2S_{AC}:2S_{AB})$ y por 18.4.5

$D=2F-E=(2a^2S_A-2S_{BC}:2b^2S_B-2S_{AC}:2c^2S_C-2S_{AB})=$

$(a^2S_A-S_{BC}:b^2S_B-S_{AC}:c^2S_C-S_{AB})$

El punto impropio de las rectas perpendiculares a AB es $(S_B:S_A:-c^2)$, luego la perpendicular por D a la recta AB será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ S_B & S_A & -c^2 \\ a^2S_A-S_{BC} & b^2S_B-S_{AC} & c^2S_C-S_{AB}\end{vmatrix}\Leftrightarrow(*)$$

$$\begin{vmatrix} S_A & -c^2 \\ b^2S_B-S_{AC} & c^2S_C-S_{AB}\end{vmatrix}=S_A(c^2S_C-S_{AB})+c^2(b^2S_B-S_{AC})=$$

$$=c^2S_CS_A-S_{AB}S_A+b^2c^2S_B-c^2S_{AC}=b^2c^2S_B-S_{AB}S_A=S_B(b^2c^2-S_A^2)=S^2S_B$$

$$\begin{vmatrix} S_B & -c^2 \\ a^2S_A-S_{BC} & c^2S_C-S_{AB}\end{vmatrix}=S_B(c^2S_C-S_{AB})+c^2(a^2S_A-S_{BC})=$$

$$=c^2S_{BC}-S_BS_{AB}+a^2c^2S_A-c^2S_{BC}=a^2c^2S_A-S_BS_{AB}=S_A(a^2c^2-S_B^2)=S^2S_A$$

$$\begin{vmatrix} S_B & S_A \\ a^2S_A-S_{BC} & b^2S_B-S_{AC}\end{vmatrix}=S_B(b^2S_B-S_{AC})-S_A(a^2S_A-S_{BC})=$$

$$=b^2S_B^2-S_BS_{AC}-a^2S_A^2+S_AS_{BC}=b^2S_B^2-a^2S_A^2$$

$$(*)\Leftrightarrow S^2S_Bx-S^2S_Ay+(b^2S_B^2-a^2S_A^2)z=0$$

Y su punto de corte con la recta AB es

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ S^2S_B & -S^2S_A & b^2S_B^2-a^2S_A^2\end{vmatrix}=\left(S^2S_A:S^2S_B:0\right)=\left(S_A:S_B:0\right)$$

Los vértices del triángulo pedal asociado al punto de Longchamps son, por tanto: $\left(S_A:S_B:0\right)$, $\left(S_A:0:S_C\right)$ y $\left(0:S_B:S_C\right)$, que claramente son los vértices del triángulo ceviano asociado a $G=\left(S_A:S_B:S_C\right)$

Nota: El punto de Longchamps también se puede escribir en función de los ángulos del triángulo de referencia de la siguiente manera:

$$E=(-\tan A+\tan B+\tan C:\tan A-\tan B+\tan C:\tan A+\tan B-\tan C)$$

c)

Punto de Gergonne: $G_E = \left(\dfrac{1}{s-a} : \dfrac{1}{s-b} : \dfrac{1}{s-c} \right)$ (ver problema anterior)

Incentro: $I = (a,b,c)$

Punto de Longchamps: $D = \left(a^2 S_A - S_{BC} : b^2 S_B - S_{AC} : c^2 S_C - S_{AB} \right)$

Todo se reduce a demostrar que el determinante de los tres puntos es cero:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{s-a} & \dfrac{1}{s-b} & \dfrac{1}{s-c} \\ a & b & c \\ a^2 S_A - S_{BC} & b^2 S_B - S_{AC} & c^2 S_C - S_{AB} \end{vmatrix} = (**)$$

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b^2 S_B - S_{AC} & c^2 S_C - S_{AB} \end{vmatrix} = b\left(c^2 S_C - S_{AB}\right) - c\left(b^2 S_B - S_{AC}\right) =$$

$$= bc^2 S_C - bS_{AB} - cb^2 S_B + cS_{AC} = cS_C(bc + S_A) - bS_B(S_A + bc) =$$

$$= (cS_C - bS_B)(bc + S_A) = -2s(a-s)(b-c)2s(s-a) = 2s^2(a-s)(b-c)$$

Luego

$$\frac{1}{s-a}\begin{vmatrix} b & c \\ b^2 S_B - S_{AC} & c^2 S_C - S_{AB} \end{vmatrix} = \frac{2s^2(a-s)(b-c)}{s-a} = -2s^2(b-c)$$

Y con el mismo razonamiento llegamos a

$$\frac{1}{s-b}\begin{vmatrix} a & c \\ a^2 S_A - S_{BC} & c^2 S_C - S_{AB} \end{vmatrix} = \frac{2s^2(b-s)(a-c)}{s-b} = -2s^2(a-c)$$

$$\frac{1}{s-c}\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 S_A - S_{BC} & b^2 S_B - S_{AC} \end{vmatrix} = \frac{2s^2(c-s)(a-b)}{s-c} = -2s^2(a-b)$$

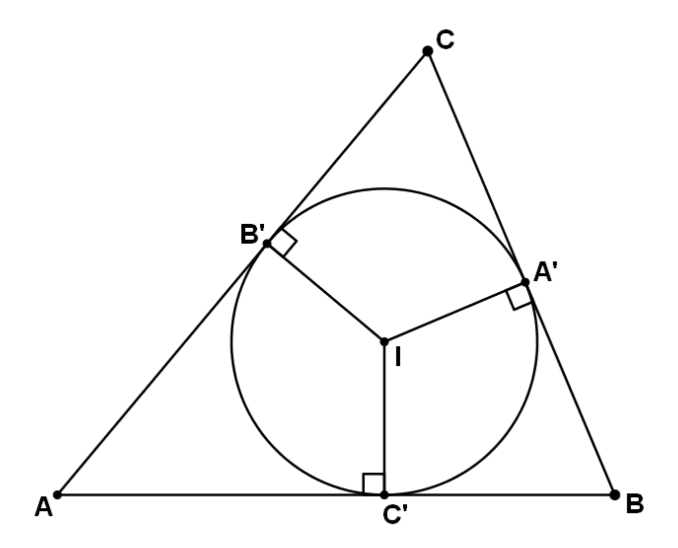
Y por tanto

$$(**) = -2s^2(b-c) + 2s^2(a-c) - 2s^2(a-b) =$$

$$-2s^2 b + 2s^2 c + 2s^2 a - 2s^2 c - 2s^2 a + 2s^2 b = 0$$

13.

La circunferencia inscrita pasa por los pedales A', B' y C' del incentro $I=(a:b:c)$.



La recta IA' es perpendicular a BC, por lo que tendrá como ecuación

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ -a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c \\ S_C & S_B \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} a & c \\ -a^2 & S_B \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a & b \\ -a^2 & S_C \end{vmatrix}z \Leftrightarrow$$

$$0=(bS_B-cS_C)x-a(S_B+ac)y+a(S_C+ab)z \Leftrightarrow$$

$$0=2s(a-s)(b-c)x-2as(s-b)y+2as(s-c)z$$

Y su punto de corte A' con la recta BC es

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ (a-s)(b-c) & -a(s-b) & a(s-c) \end{vmatrix}=$$

$$=(0:-a(s-c):-a(s-b))=(0:s-c:s-b)=A'$$

De la misma manera los otros dos pedales del incentro son:

$B'=(s-c:0:s-a)$ y $C'=(s-b:s-a:0)$

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(ux+vy+wz)(x+y+z)=0$$

Sustituimos la ecuación general de 18.9.1 en el punto A':

$$a^2(s-c)(s-b)+b^2 0+c^2 0-(u0+v(s-c)+w(s-b))(0+s-c+s-b)=0 \Leftrightarrow$$

$$a^2(s-c)(s-b)-(u0+v(s-c)+w(s-b))a=0 \Leftrightarrow$$

$$a(s-c)(s-b)=(s-c)v+(s-b)w$$

De la misma forma, sustituyendo en B' y C', llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a(s-c)(s-b) = (s-c)v + (s-b)w \\ b(s-a)(s-c) = (s-c)u + (s-a)w \\ c(s-a)(s-b) = (s-b)u + (s-a)v \end{cases}$$

Untitled-1 *

```
In[20]:= s = (a + b + c) / 2;
         Solve[{
             a (s - c) (s - b) == (s - c) v + (s - b) w,
             b (s - a) (s - c) == (s - c) u + (s - a) w,
             c (s - a) (s - b) == (s - b) u + (s - a) v}, {u, v, w}];
         Simplify[%]

Out[22]= {{u → 1/4 (-a + b + c)^2, v → 1/4 (a - b + c)^2, w → 1/4 (a + b - c)^2}}
```

100%

Las soluciones son

$$u = \frac{(-a+b+c)^2}{4} = \frac{(2s-2a)^2}{4} = (s-a)^2, v = (s-b)^2, w = (s-c)^2$$

Y por tanto, la ecuación de la circunferencia inscrita es

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + \left((s-a)^2x + (s-b)^2y + (s-c)^2z\right)(x+y+z) = 0$$

14.

Sabemos que $M_A=(0:1:1)$, $M_B=(1:0:1)$, y $M_C=(1:1:0)$. Sustituimos estos tres puntos en la ecuación general de la circunferencia:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-(ux+vy+wz)(x+y+z)=0$$

En M_A: $a^2-2(v+w)=0$

En M_B: $b^2-2(u+w)=0$

En M_C: $c^2-2(u+v)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a^2-2(v+w)=0\Rightarrow v+w=\dfrac{a^2}{2}\\ b^2-2(u+w)=0\Rightarrow u+w=\dfrac{b^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow v-u=\dfrac{a^2-b^2}{2}\\ c^2-2(u+v)=0\Rightarrow u+v=\dfrac{c^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 2v=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}=S_B$$

La solución es $u=\dfrac{S_A}{2}$, $v=\dfrac{S_B}{2}$, $w=\dfrac{S_C}{2}$, y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios es

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{2}(S_A\,x+S_B\,y+S_C\,z)(x+y+z)=0$$

Veamos que esta circunferencia contiene los pies de las alturas del triángulo:

La altura por A es la recta que pasa por A y el punto impropio de las rectas perpendiculares a BC, $(-a^2:S_C:S_B)$.

$$0=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 0\\ -a^2 & S_C & S_B\end{vmatrix}=0x-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -a^2 & S_B\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}1 & 0\\ -a^2 & S_C\end{vmatrix}z\Leftrightarrow$$

$$0=-S_By+S_Cz$$

Y su punto de corte con el lado BC será

$$0=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -S_B & S_C\end{vmatrix}=\left(0:-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & S_C\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -S_B\end{vmatrix}\right)=(0:-S_C:-S_B)=(0:S_C:S_B)=H_A$$

De la misma forma determinamos los otros dos pies de las alturas a a cada lado: $H_B=(S_C:0:S_A)$, y $H_C=(S_B:S_A:0)$.

Efectivamente, estos tres puntos pertenecen a la circunferencia:

Sustituyendo en H_A: $a^2S_{BC}-\dfrac{1}{2}(S_{BC}+S_{BC})(S_B+S_C)=a^2S_{BC}-\dfrac{1}{2}(2S_{BC})a^2=0$

Y de la misma forma en H_B y H_C.

Por último, vamos a ver que esta circunferencia incluye también los puntos medios entre el ortocentro y cada vértice.

$H=\left(S_{BC}:S_{AC}:S_{AB}\right)$ con suma S^2.

$A=(1,0,0)=(S^2:0:0)$

$A'=H+A=\left(S_{BC}+S^2:S_{AC}:S_{AB}\right)$

Sustituimos en la ecuación:

$$a^2S_{AC}S_{AB}+b^2S_{AB}(S_{BC}+S^2)+c^2(S_{BC}+S^2)S_{AC}-$$
$$-\frac{1}{2}\left(S_A(S_{BC}+S^2)+S_BS_{AC}+S_CS_{AB}\right)\left(S_{BC}+S^2+S_{AC}+S_{AB}\right)=(*)$$

Por un lado:

$$\frac{1}{2}\left(S_A(S_{BC}+S^2)+S_BS_{AC}+S_CS_{AB}\right)\left(S_{BC}+S^2+S_{AC}+S_{AB}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(S_AS_{BC}+S_AS^2+S_BS_{AC}+S_CS_{AB}\right)\left(S_{BC}+S^2+S_{AC}+S_{AB}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(3S_AS_BS_C+S_AS^2\right)\left(2S^2\right)=S^2S_A\left(3S_BS_C+S^2\right)$$

Y por otro lado:

$$a^2S_{AC}S_{AB}+b^2S_{AB}(S_{BC}+S^2)+c^2(S_{BC}+S^2)S_{AC}=$$
$$a^2S_{AC}S_{AB}+b^2S_{AB}S_{BC}+b^2S_{AB}S^2+c^2S_{BC}S_{AC}+c^2S^2S_{AC}=$$
$$S_AS^2\left(b^2S_B+c^2S_C\right)+S_AS_BS_C\left(a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C\right)=$$
$$S_AS^2\left(b^2S_B+c^2S_C\right)+2S^2S_AS_BS_C=S^2S_A\left(b^2S_B+c^2S_C+2S_BS_C\right)=$$
$$S^2S_A\left(2S^2-a^2S_A+2S_BS_C\right)=S^2S_A\left(S^2+S_BS_C+2S_BS_C\right)=S^2S_A\left(S^2+3S_BS_C\right)$$

Luego

$$(*)=S^2S_A\left(S^2+3S_BS_C\right)-S^2S_A\left(S^2+3S_BS_C\right)=0$$

Con los otros dos puntos $B'=H+B=\left(S_{BC}:S_{AC}+S^2:S_{AB}\right)$ y $C'=H+C=\left(S_{BC}:S_{AC}:S_{AB}+S^2\right)$ el razonamiento es similar.

15.

a)

Ángulo con la recta AB:

$$\cot\theta_C = \frac{S_A(p_3-p_2)-S_B(p_1-p_3)}{S(p_1-p_2)}$$

$$\cot\theta_C = \frac{S_A(p_3-p_2)-S_B(p_1-p_3)}{S(p_1-p_2)} = \frac{S_A(-b-c)-S_B(0+b)}{S(0-c)} =$$

$$\frac{-(b+c)S_A-bS_B}{-cS} = \frac{(b+c)S_A+bS_B}{cS} = \frac{b(S_A+S_B)+cS_A}{cS} = \frac{bc^2+cS_A}{cS} = \frac{bc+S_A}{S} =$$

$$= \frac{S_{A/2}}{S} = \cot(A/2)$$

Ángulo con la recta AC:

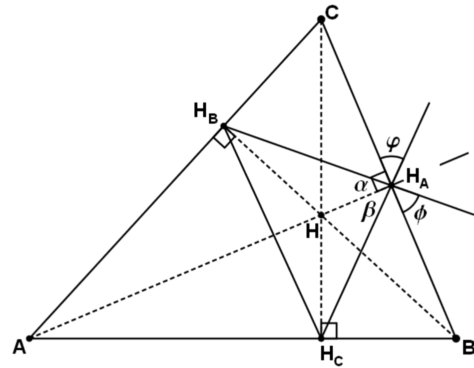
$$\cot\theta_B = \frac{S_C(p_2-p_1)-S_A(p_3-p_2)}{S(p_3-p_1)} = \frac{S_C(c-0)-S_A(-b-c)}{S(-b-0)} =$$

$$\frac{cS_C+S_A(b+c)}{-bS} = \frac{c(S_C+S_A)+bS_A}{-bS} = \frac{cb^2+bS_A}{-bS} = \frac{cb+S_A}{-S} = \frac{S_{A/2}}{-S} = -\cot(A/2) =$$

$$\cot(\pi - A/2)$$

b)

Para demostrar que $\alpha=\beta$ trabajaremos con sus complementarios φ y ϕ, para de esta manera utilizar las fórmulas de 18.10.3.



$H=(S_{BC}:S_{AC}:S_{AB})$, y en el problema #14 calculamos los pies de las alturas:

$H_A=(0:S_C:S_B)$, $H_B=(S_C:0:S_A)$, $H_C=(S_B:S_A:0)$

- Recta H_CH_A:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ S_B & S_A & 0 \\ 0 & S_C & S_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_A & 0 \\ S_C & S_B \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} S_B & 0 \\ 0 & S_B \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} S_B & S_A \\ 0 & S_C \end{vmatrix} z = S_{AB}x - S_B^2 y + S_{BC}z \Leftrightarrow$$

$$0 = S_A x - S_B y + S_C z$$

- Ángulo $\varphi = \angle(H_AH_C, BC)$:

$$\cot\varphi = \frac{S_B(p_1 - p_3) - S_C(p_2 - p_1)}{S(p_2 - p_3)} = \frac{S_B(S_A - S_C) - S_C(-S_B - S_A)}{S(-S_B - S_C)} =$$

$$= \frac{S_{AB} - S_{BC} + S_{BC} + S_{AC}}{-S(S_B + S_C)} = \frac{S_{AB} + S_{AC}}{-S(S_B + S_C)} = \frac{S_A(S_B + S_C)}{-S(S_B + S_C)} = \frac{-S_A}{S}$$

- Recta $H_B H_A$:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ S_C & 0 & S_A \\ 0 & S_C & S_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & S_A \\ S_C & S_B \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} S_C & S_A \\ 0 & S_B \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} S_C & 0 \\ 0 & S_C \end{vmatrix} z = -S_{AC}x - S_{BC}y + S_C^2 z \Leftrightarrow$$

$$0 = S_A x + S_B y - S_C z$$

- Ángulo $\phi = \angle(H_A H_B, BC)$:

$$\cot\phi = \frac{S_B(p_1 - p_3) - S_C(p_2 - p_1)}{S(p_2 - p_3)} = \frac{S_B(S_A + S_C) - S_C(S_B - S_A)}{S(S_B + S_C)} =$$

$$= \frac{S_{AB} + S_{BC} - S_{BC} + S_{AC}}{S(S_B + S_C)} = \frac{S_{AB} + S_{AC}}{S(S_B + S_C)} = \frac{S_A(S_B + S_C)}{S(S_B + S_C)} = \frac{S_A}{S}$$

Y llegamos a $\cot\varphi = \frac{-S_A}{S} = -\cot\phi$

16.

La bisectriz por A tiene como ecuación $cy - bz = 0$. El punto D es, por lo tanto,

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -b \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & -b \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \right) = (0 : b : c)$$

La recta AB es $z = 0$, luego el punto impropio de sus paralelas es $(-1 : 1 : 0)$, y por tanto la recta DE es

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & b \end{vmatrix} z = cx + cy - bz$$

Y su punto de corte E con el lado AC es

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ c & c & -b \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & -b \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & -b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & c \end{vmatrix} \right) = (-b : 0 : -c) = (b : 0 : c)$$

La recta BE es

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ b & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z = -cx + bz$$

La recta AC es $y = 0$, luego el punto impropio de sus paralelas es $(1 : 0 : -1)$, y por tanto la recta DF es

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ b & c \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & c \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} z = bx - cy + bz$$

El punto F de corte con AB será:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ b & -c & b \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -c & b \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b & b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & -c \end{vmatrix} \right) = (c : b : 0)$$

La recta CF es

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} c & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} z = bx - cy$$

El punto P será

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} -c & b \\ b & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -c & 0 \\ b & c \end{vmatrix} \right) = (-bc : b^2 : -c^2)$$

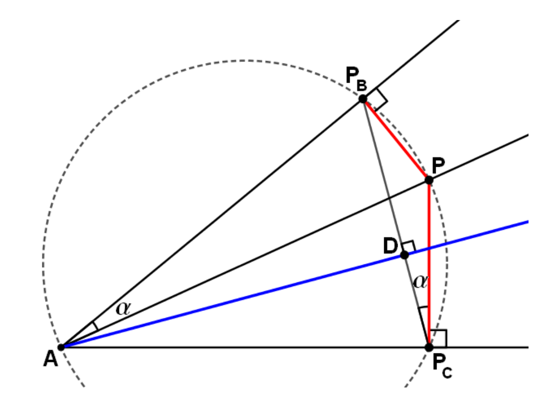
Y, finalmente, la recta AP es

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -bc & b^2 & -c^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & -c^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -bc & -c^2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -bc & b^2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} z = c^2 y - b^2 z$$

Que es la simediana por A (ver 19.2.1)

17.

Solución sintética:



Puesto que $\angle AP_BP$ y $\angle AP_CP$ son rectos, pasarán por la circunferencia cuyo diámetro es AP. Luego $\angle P_BP_CP = \angle P_BAP = \alpha$ puesto que son ángulos que abarcan el mismo arco.

$\angle AP_CD = 90 - \angle P_BP_CP = 90 - \alpha$

Sea D el punto de corte entre P_BP_C y su perpendicular por A.

Entonces $\angle DAP_C = 180 - 90 - \angle AP_CD = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$

Así pues, la recta AD es la simétrica de AP respecto de la bisectriz en A.

Solución analítica:

Si $P = (u : v : w)$, el triángulo pedal asociado tendrá por vértices (ver 18.7.2)

$$P_A = \left(0 : a^2v + S_C u : a^2w + S_Bu\right)$$
$$P_B = \left(b^2u + S_Cv : 0 : S_Av + b^2w\right)$$
$$P_C = \left(c^2u + S_Bw : c^2v + S_Aw : 0\right)$$

La recta P_BP_C es

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ c^2u + S_Bw & c^2v + S_Aw & 0 \\ b^2u + S_Cv & 0 & S_Av + b^2w \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c^2v + S_Aw & 0 \\ 0 & S_Av + b^2w \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} c^2u + S_Bw & 0 \\ b^2u + S_Cv & S_Av + b^2w \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} c^2u + S_Bw & c^2v + S_Aw \\ b^2u + S_Cv & 0 \end{vmatrix} z$$

$$= \left(c^2v + S_Aw\right)\left(S_Av + b^2w\right)x - \left(c^2u + S_Bw\right)\left(S_Av + b^2w\right)y - \left(b^2u + S_Cv\right)\left(c^2v + S_Aw\right)z$$

Cuyo punto impropio es (queda por demostrar):

$= (f : g : h)$

$f = c^2S_Cv - b^2S_Bw\,, \quad g = -b^2(c^2v + S_Aw)\,, \quad h = c^2(b^2w + S_Av)$

Y por lo tanto los puntos impropios de sus perpendiculares serán:

$$\left(g\,S_B - h\,S_C : h\,S_C - f\,S_A : f\,S_A - g\,S_B\right)$$
$$g\,S_B - h\,S_C = -b^2(c^2v + S_Aw)S_B - c^2(b^2w + S_Av)S_C =$$
$$-b^2c^2vS_B - b^2S_AS_Bw - c^2b^2wS_C - c^2S_AvS_C =$$
$$-(b^2S_B + S_AS_C)c^2v - (S_AS_B + c^2S_C)b^2w = -S^2c^2v - S^2b^2w = -S^2(c^2v + b^2w)$$

$$h\,S_C - f\,S_A = c^2(b^2w + S_Av)S_C - \left(c^2S_Cv - b^2S_Bw\right)S_A =$$
$$b^2wc^2S_C + S_Avc^2S_C - c^2S_CvS_A + b^2S_BwS_A =$$
$$b^2wc^2S_C + b^2S_BwS_A = (c^2S_C + S_BS_A)b^2w = S^2b^2w$$

$$f\,S_A - g\,S_B = \left(c^2S_Cv - b^2S_Bw\right)S_A + b^2(c^2v + S_Aw)S_B =$$
$$c^2S_CvS_A - b^2S_BwS_A + c^2vb^2S_B + S_Awb^2S_B =$$
$$c^2S_CvS_A + c^2vb^2S_B = (S_CS_A + b^2S_B)c^2v = S^2c^2v$$

Es decir,
$$\left(-S^2(c^2v + b^2w) : S^2b^2w : S^2c^2v\right) = \left(-c^2v - b^2w : b^2w : c^2v\right)$$

Y por lo tanto, la perpendicular a P_BP_C por A será
$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -c^2v - b^2w & b^2w & c^2v \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -c^2v - b^2w & c^2v \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -c^2v - b^2w & b^2w \end{vmatrix} z =$$
$$= c^2vy - b^2wz$$

Que es la conjugada isogonal de AP respecto de AB y AC (ver 19.3.1)

De la misma forma se demuestra que las otras perpendiculares coinciden con las conjugadas isogonales respectivas, y por lo tanto su punto de corte es el conjugado isogonal de P.

18.

Sea un punto $P=(u:v:w)$. Sus pedales asociados son (18.7.2):

$$P_A=\left(0:a^2v+S_Cu:a^2w+S_Bu\right)$$
$$P_B=\left(b^2u+S_Cv:0:b^2w+S_Av\right)$$
$$P_C=\left(c^2u+S_Bw:c^2v+S_Aw:0\right)$$

Estos puntos están alineados si y sólo si el determinante que forman se anula:

$$0=\begin{vmatrix} 0 & a^2v+S_Cu & a^2w+S_Bu \\ b^2u+S_Cv & 0 & b^2w+S_Av \\ c^2u+S_Bw & c^2v+S_Aw & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 2a^2v+2S_Cu & 2a^2w+2S_Bu \\ 2b^2u+2S_Cv & 0 & 2b^2w+2S_Av \\ 2c^2u+2S_Bw & 2c^2v+2S_Aw & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 2a^2v+(a^2+b^2-c^2)u & 2a^2w+(a^2-b^2+c^2)u \\ 2b^2u+(a^2+b^2-c^2)v & 0 & 2b^2w+(-a^2+b^2+c^2)v \\ 2c^2u+(a^2-b^2+c^2)w & 2c^2v+2(-a^2+b^2+c^2)w & 0 \end{vmatrix}=(*)$$

```
Untitled-1 *
In[6]:= M = {
    {0, (a^2 + b^2 - c^2) u + 2 a^2 v, (a^2 - b^2 + c^2) u + 2 a^2 w},
    {(b^2 - c^2 + a^2) v + 2 b^2 u, 0, (b^2 + c^2 - a^2) v + 2 b^2 w},
    {(c^2 + a^2 - b^2) w + 2 c^2 u, (c^2 - a^2 + b^2) w + 2 c^2 v, 0}}
  Factor[Det[M]]
Out[6]= {{0, (a^2 + b^2 - c^2) u + 2 a^2 v, (a^2 - b^2 + c^2) u + 2 a^2 w},
   {2 b^2 u + (a^2 + b^2 - c^2) v, 0, (-a^2 + b^2 + c^2) v + 2 b^2 w},
   {2 c^2 u + (a^2 - b^2 + c^2) w, 2 c^2 v + (-a^2 + b^2 + c^2) w, 0}}
Out[7]= -2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v + w) (c^2 u v + b^2 u w + a^2 v w)
100%
```

$$(*)=\frac{1}{8}2(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)(a+b+c)(u+v+w)(c^2uv+b^2uw+c^2vw)=$$

$$=\frac{1}{4}16(s-a)(s-c)(s-b)s(u+v+w)(c^2uv+b^2uw+c^2vw)=$$

$$=S^2(u+v+w)(c^2uv+b^2uw+c^2vw)\Leftrightarrow c^2uv+b^2uw+c^2vw=0$$

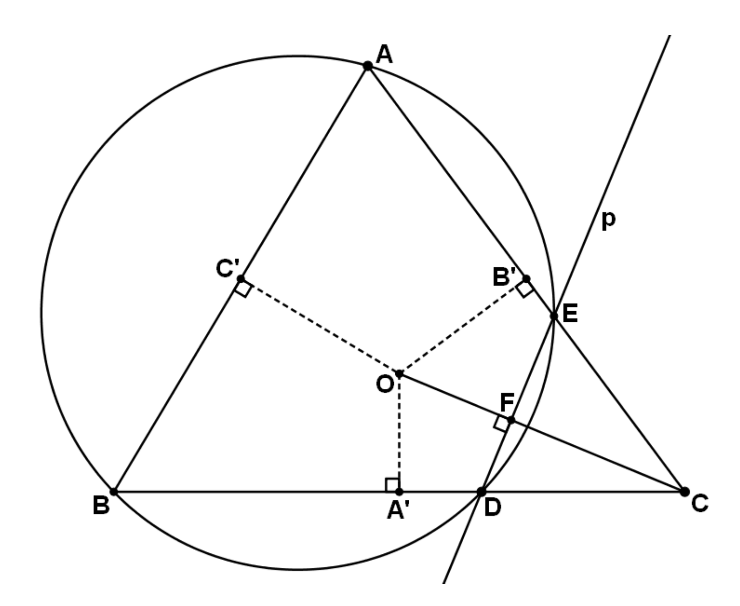
Que es la ecuación de la circunferencia circunscrita, tal y como queríamos ver.

19.

Solución sintética.

Trazamos el circuncentro O y sus pedales asociados A', B' y C' que serán los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente.

La recta t pasa por C y es tangente a la circunferencia circunscrita, luego es perpendicular al radio OC. Luego la recta p también es perpendicular al radio OC. Sea F su punto de corte con OC.



Tenemos que $\angle A'OC = \angle A$, pues al ser ΔBOC isósceles, la mediatriz de BC es también bisectriz de $\angle BOC$, y por tanto $\angle A'OC = \frac{1}{2}\angle BOC$, y por otro lado $\angle BOC = 2\angle A$ por ser el ángulo central que abarca su mismo arco de circunferencia.

Los puntos A' y F pertenecen a la circunferencia de diámetro OD, pues forman ángulos rectos con el segmento OD (10.1.4). Luego el cuadrilátero $\lozenge OFDA'$ es cíclico, y por tanto sus ángulos opuestos son suplementarios (10.5.3):
$\angle A'OF + \angle A'DF = 180$

Puesto que $\angle A'OF = \angle A'OC = \angle A$ llegamos a $\angle A + \angle A'DF = 180$, y de la misma forma también llegamos a $\angle B + \angle B'EF = 180$, con lo que, por 10.5.5 se demuestra que $\lozenge ABDE$ es cíclico.

Solución analítica.

Sustituyendo $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 1$, $u = v = w = 0$ en 18.10.1 deducimos que la recta que pasa por C tangente a la circunferencia circunscrita tiene por ecuación:

$$b^2 x + a^2 y = 0$$

Y por tanto su punto impropio es $(a^2 : -b^2 : b^2 - a^2)$ (al final de la solución se hace una determinación directa de este punto)

Luego la recta p tendrá por ecuación

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \\ a^2 & -b^2 & b^2-a^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ -b^2 & b^2-a^2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ a^2 & b^2-a^2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ a^2 & -b^2 \end{vmatrix}z \Leftrightarrow$$

$$0=\left(\lambda(b^2-a^2)+b^2(1-\lambda)\right)x+a^2(1-\lambda)y-\lambda a^2 z \Leftrightarrow$$

$$0=\left(b^2-\lambda a^2\right)x+a^2(1-\lambda)y-\lambda a^2 z$$

Y su punto de corte E con el lado AC será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ b^2-\lambda a^2 & a^2(1-\lambda) & -\lambda a^2 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a^2(1-\lambda) & -\lambda a^2 \end{vmatrix}:0:\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b^2-\lambda a^2 & a^2(1-\lambda) \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(-\lambda a^2:0:-(b^2-\lambda a^2)\right)=\left(\lambda a^2:0:b^2-\lambda a^2\right)$$

Determinamos la ecuación de la circunferencia que pasa por A, B y D:

Pasa por $B=(0,1,0)$:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-(u\,x+v\,y+w\,z)(x+y+z)=0 \Rightarrow$$

$$a^2\cdot 1\cdot 0+b^2\cdot 0\cdot 0+c^2\cdot 0\cdot 1-(u0+v1+w0)(0+1+0)=0 \Rightarrow$$

$$-v=0 \Rightarrow v=0$$

Pasa por $A=(1,0,0)$:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-(u\,x+v\,y+w\,z)(x+y+z)=0 \Rightarrow$$

$$-(u1+v0+w0)(1+0+0)=0 \Rightarrow$$

$$-u=0 \Rightarrow u=0$$

Pasa por $D=(0,\lambda,1-\lambda)$

$$a^2\lambda(1-\lambda)-(w(1-\lambda))(0+\lambda+1-\lambda)=0 \Leftrightarrow$$

$$(1-\lambda)\left[a^2\lambda-w\right]=0 \Rightarrow a^2\lambda-w=0 \Rightarrow w=a^2\lambda$$

La ecuación de la circunferencia que pasa por A, B y D es, por tanto,

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-a^2\,\lambda z(x+y+z)=0$$

Y el punto $E=\left(\lambda a^2:0:b^2-\lambda a^2\right)$ pertenece a esta circunferencia:

$$b^2(b^2-\lambda a^2)\lambda a^2-\lambda a^2(b^2-\lambda a^2)(\lambda a^2+0+b^2-\lambda a^2)=$$

$$b^2(b^2-\lambda a^2)\lambda a^2-\lambda a^2(b^2-\lambda a^2)b^2=0$$

Nota: Determinación directa del punto impropio de la recta tangente:
El circuncentro de ΔABC es $O=(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C)$, luego la recta OC es

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \end{vmatrix}=-b^2S_Bx+a^2S_Ay$$

Su punto impropio es $\left(a^2S_A:b^2S_B:-(b^2S_B+a^2S_A)\right)=(f:g:h)$

Y aplicando 18.7.5 el punto impropio de su perpendicular será:

$\left(g\,S_B-hS_C:hS_C-f\,S_A:f\,S_A-g\,S_B\right)$

$$g\,S_B-hS_C=b^2S_B^2+(b^2S_B+a^2S_A)S_C=b^2S_B(S_B+S_C)+a^2S_AS_C=b^2S_Ba^2+a^2S_AS_C=$$
$$=a^2(b^2S_B+S_AS_C)=S^2a^2$$

Y de la misma forma:

$$hS_C-f\,S_A=b^2(a^2S_A+S_{BC})=-S^2b^2$$

Y también:

$$f\,S_A-g\,S_B=a^2S_AS_A-b^2S_BS_B=(S^2-S_{BC})S_A-(S^2-S_{AC})S_B=$$
$$=S^2S_A-S_{BC}S_A-S^2S_B+S_{AC}S_B=S^2S_A-S^2S_B=S^2(S_A-S_B)=S^2(b^2-a^2)$$

Es decir: $\left(S^2a^2:-S^2b^2:S^2(b^2-a^2)\right)=\left(a^2:-b^2:b^2-a^2\right)$

20.

$I=(a:b:c)$

Recta IB:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \Leftrightarrow cx-az=0$$

$B'=IB\cap AC$

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & -a \end{vmatrix}=(a:0:c)$$

Recta IA:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \Leftrightarrow -cy+bz=0$$

$A'=IA\cap BC$

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -c & b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0:b:c)$$

Recta IC:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \Leftrightarrow -bx+ay=0$$

$C'=IC\cap AB$

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -c & b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0:b:c)$$

La ecuación de una circunferencia es de la forma:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-(ux+vy+wz)(x+y+z)=0$$

Pasa por B, luego

$$a^2 0+b^2 0+c^2 0-(u0+v1+w0)(1)=0\Rightarrow\ldots\Rightarrow v=0$$

Pasa por A', luego

$$a^2bc+b^2 0+c^2 0-(u0+wc)(b+c)=0\Rightarrow\ldots\Rightarrow w=\frac{a^2b}{b+c}$$

Pasa por B', luego

$$a^2 0+b^2ac+c^2 0-\left(ua+\frac{a^2b}{b+c}c\right)(a+c)=0\Rightarrow\ldots\Rightarrow u=bc\left(\frac{b}{a+c}-\frac{a}{b+c}\right)$$

Finalmente, también pasa por C', luego se tiene que cumplir

$$a^2 0+b^2 0+c^2ab-\left[bc\left(\frac{b}{a+c}-\frac{a}{b+c}\right)a+\frac{a^2b}{b+c}0\right](a+b)=0\Rightarrow$$

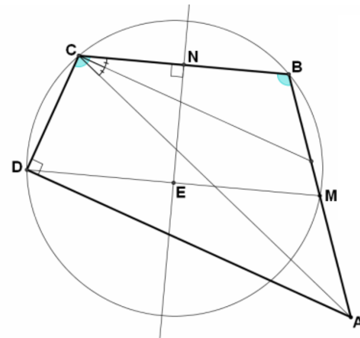
$$abc^2-\left[bc\left(\frac{b}{a+c}-\frac{a}{b+c}\right)a\right](a+b)=0$$

$$c=\left(\frac{b}{a+c}-\frac{a}{b+c}\right)(a+b)\Rightarrow\frac{c}{a+b}=\frac{b}{a+c}-\frac{a}{b+c}$$

Que es la identidad que aparece en el enunciado.

Para ver el recíproco, basta tomar la ecuación de la circunferencia con los valores u, v y w que hemos deducido y comprobar que efectivamente la ecuación se satisface para C'.

21.
Sea M el punto medio del lado AB. El punto D será el punto simétrico de M respecto de la mediatriz de BC, es decir, la intersección entre la mediatriz de BC y la recta paralela a BC por M.



Fijamos ΔABC como triángulo de referencia. El punto medio del lado AB será $M=(1:1:0)$. La mediatriz del lado BC tiene por ecuación $0=(b^2-c^2)x+a^2(y-z)$ (ver 18.7.1)

El lado BC tiene por ecuación $x=0$. Su vector de desplazamiento es $(0,-1,1)$, luego la recta paralela a BC por M será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}z \Leftrightarrow x-y-z=0$$

Y el punto E de corte entre ambas rectas será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ b^2-c^2 & a^2 & -a^2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow E=\left(\begin{vmatrix} a^2 & -a^2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} b^2-c^2 & -a^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b^2-c^2 & a^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(-2a^2 : b^2-c^2-a^2 : -(b^2-c^2)-a^2\right)=\left(-2a^2 : b^2-c^2-a^2 : -b^2+c^2-a^2\right)=$$

$$=\left(-2a^2 : -2S_B : -2S_C\right)=\left(a^2 : S_B : S_C\right)$$

El punto D simétrico de M respecto de E será:

$$M=(1:1:0)\Rightarrow \Sigma=2$$

$$E=\left(a^2 : S_B : S_C\right)\Rightarrow \Sigma=a^2+S_B+S_C=2a^2$$

$$M=(a^2 : a^2 : 0)\Rightarrow \Sigma=2a^2$$

$$D=2E-M=2\left(a^2 : S_B : S_C\right)-\left(a^2 : a^2 : 0\right)=\left(2a^2-a^2 : 2S_B-a^2 : 2S_C\right)=$$

$$=\left(a^2 : 2S_B-a^2 : 2S_C\right)=\left(a^2 : c^2-b^2 : a^2+b^2-c^2\right)$$

La recta CD será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ a^2 & c^2-b^2 & 2S_C \end{vmatrix}==\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c^2-b^2 & 2S_C \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 2S_C \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix}z=$$

$$=-\left(c^2-b^2\right)x+a^2y=\left(b^2-c^2\right)x+a^2y$$

Con punto impropio: $\left(a^2 : -(b^2-c^2) : b^2-c^2-a^2\right)=\left(-a^2 : b^2-c^2 : a^2+c^2-b^2\right)$

La recta AD será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a^2 & c^2-b^2 & a^2+b^2-c^2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & a^2+b^2-c^2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix}z=$$

$$=-(a^2+b^2-c^2)y+(c^2-b^2)z=(c^2-a^2-b^2)y+(c^2-b^2)z$$

Con punto impropio: $\left(c^2-a^2-b^2-c^2+b^2 : c^2-b^2 : -c^2+a^2+b^2\right)=$
$=\left(a^2 : b^2-c^2 : c^2-a^2-b^2\right)$

Puesto que $AD \perp CD$ se debe cumplir:

$$0=S_A(-a^2)(a^2)+S_B(b^2-c^2)(b^2-c^2)+S_C(a^2+c^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=$$

$$=-a^4\frac{(-a^2+b^2+c^2)}{2}+(b^2-c^2)^2\frac{(a^2-b^2+c^2)}{2}-\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)^2=$$

$$=a^2(b^2-c^2-ab)(b^2-c^2+ab)$$

Luego $b^2-c^2-ab=0$ o bien $b^2-c^2+ab=0$, pero el ángulo $\angle B$ es obtuso (pues si $\angle B=\angle A$ son agudos, entonces $\angle CDM>90$, pero $\angle CDM<\angle CDA=90$), luego $b>c$ y por tanto $b^2>c^2 \Rightarrow b^2-c^2>0 \quad ab+b^2-c^2\neq 0$, en consecuencia tenemos que $b^2-c^2-ab=0$.

La bisectriz interna por C será la recta que pasa por el punto $C=(0,0,1)$ y el incentro $I=(a:b:c)$

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix}z=-bx+ay$$

Aplicamos 18.8.4 para comprobar que estas rectas son perpendiculares:

$$0=S_A(a^2-0)(a-0)+S_B(0-(b^2-c^2))(0+b)+S_C(b^2-c^2-a^2)(-b-a)=$$

$$=a^3S_A+b(c^2-b^2)S_B-S_C(b^2-c^2-a^2)(a+b)=$$

$$=a^3S_A+bc^2S_B-bb^2S_B-aS_Cb^2+aS_Cc^2+aS_Ca^2-bS_Cb^2+bS_Cc^2+bS_Ca^2=$$

$$=a^3S_A+bc^2S_B-b^3S_B-ab^2S_C+ac^2S_C+a^3S_C-b^3S_C+bc^2S_C+a^2bS_C=$$

$$=a^3(S_A+S_C)-b^3(S_B+S_C)+bc^2(S_B+S_C)-(ab^2-ac^2-a^2b)S_C=$$

$$=a^3b^2-b^3a^2+bc^2a^2-a(b^2-c^2-ab)S_C=$$

$$=a\left[a^2b^2-b^3a+bc^2a-(b^2-c^2-ab)S_C\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=a^2b^2-b^3a+bc^2a-(b^2-c^2-ab)S_C=ab(ab-b^2+c^2)-(b^2-c^2-ab)S_C=$$

$$=ab(ab-b^2+c^2)+(-b^2+c^2+ab)S_C=(-b^2+c^2+ab)(ab+S_C)=$$

$$=-(b^2-c^2-ab)(ab+S_C)=0(ab+S_C)=0$$

22.

$A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$, $N=(1:1:0)$, $M=(1:0:1)$ y $I=(a:b:c)$.

La recta NI es:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c \\ 1 & 0 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 0 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}z=-cx+cy+(a-b)z$$

y su punto impropio es:

$$\left(c-(a-b):a-b+c:-2c\right)=\left(a-b-c:b-a-c:2c\right)$$

La recta paralela a NI por C es

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ a-b-c & b-a-c & 2c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b-a-c & 2c \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a-b-c & 2c \end{vmatrix}y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=(a+c-b)x+(a-b-c)y$$

Esta recta cortará la recta AB (con ecuación $z=0$) en el punto E:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ a+c-b & a-b-c & 0 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a-b-c & 0 \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a+c-b & 0 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a+c-b & a-b-c \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(-(a-b-c):a+c-b:0\right)=\left(a-b-c:b-a-c:0\right)=E$$

La recta MI es:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix}z=bx-(a-c)y-bz\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=bx+(c-a)y-bz$$

y su punto impropio es:

$$\left(c-a+b:-b-b:b-(c-a)\right)=\left(c-a+b:-2b:b-c+a\right)=$$

$$=\left(a-b-c:2b:c-a-b\right)=$$

La recta paralela a MI por B es

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a-b-c & 2b & c-a-b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2b & c-a-b \\ 1 & 0 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} a-b-c & 2b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}z=$$

$$=-(c-a-b)x+(a-b-c)z\Leftrightarrow 0=(a+b-c)x+(a-b-c)z$$

Y su punto de corte con la recta AC (con ecuación $y=0$) en el punto D:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ a+b-c & 0 & a-b-c \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b-c \end{vmatrix}:0:\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a+b-c & 0 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(a-b-c:0:-(a+b-c)\right)=\left(a-b-c:0:c-a-b\right)=D$$

La recta DE tiene por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a-b-c & b-a-c & 0 \\ a-b-c & 0 & c-a-b \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix} b-a-c & 0 \\ 0 & c-a-b \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} a-b-c & 0 \\ a-b-c & c-a-b \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a-b-c & b-a-c \\ a-b-c & 0 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left((b-a-c)(c-a-b):-(a-b-c)(c-a-b):-(a-b-c)(b-a-c)\right)$$

$$=\left((a-b+c)(a+b-c):(a-b-c)(a+b-c):(a-b-c)(a-b+c)\right)$$

Su punto impropio es:

$$=\left((a-b+c)(a+b-c):(a-b-c)(a+b-c):(a-b-c)(a-b+c)\right)$$

$$=\begin{pmatrix} (a-b-c)(a+b-c)-(a-b-c)(a-b+c): \\ (a-b-c)(a-b+c)-(a-b+c)(a+b-c): \\ (a-b+c)(a+b-c)-(a-b-c)(a+b-c) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (a-b-c)(a+b-c)-(a-b+c)): \\ (a-b+c)((a-b-c)-(a+b-c)): \\ (a+b-c)((a-b+c)-(a-b-c)) \end{pmatrix}=$$

$$=\left(2(a-b-c)(b-c):-2b(a-b+c):2c(a+b-c)\right)=$$

$$\left((a-b-c)(b-c):-b(a-b+c):c(a+b-c)\right)$$

La recta paralela a DE por I será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ (a-b-c)(b-c) & -b(a-b+c) & c(a+b-c) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} b & c \\ -b(a-b+c) & c(a+b-c) \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} a & c \\ (a-b-c)(b-c) & c(a+b-c) \end{vmatrix}y+$$

$$+\begin{vmatrix} a & b \\ (a-b-c)(b-c) & -b(a-b+c) \end{vmatrix}z=$$

$$=\left(bc(a+b-c)+bc(a-b+c)\right)x-\left(ac(a+b-c)-c(b-c)(a-b-c)\right)y+$$

$$+\left(-ab(a-b+c)-b(a-b-c)(b-c)\right)z=$$

$$=2abc\,x+c\left(-a^2-b^2+c^2\right)y+b(-a^2+b^2-c^2)z$$

Y su punto de corte P con el lado BC será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 2abc & c\left(-a^2-b^2+c^2\right) & b(-a^2+b^2-c^2) \end{vmatrix}=$$

$$=\left(0:-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2abc & b(-a^2+b^2-c^2) \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2abc & c\left(-a^2-b^2+c^2\right) \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(0:-b(-a^2+b^2-c^2):c\left(-a^2-b^2+c^2\right)\right)=\left(0:2bS_B:-2cS_C\right)=\left(0:-bS_B:cS_C\right)$$

La recta AI tiene por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 0 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix}z=cy-bz$$

Y su punto impropio es: $(c+b:-b:-c)=(-b-c:b:c)$

Las rectas perpendiculares a AI tendrán por punto impropio (18.7.5):

$$(bS_B-cS_C:cS_C-(-b-c)S_A:(-b-c)S_A-bS_B)=$$
$$=(bS_B-cS_C:cS_C+(b+c)S_A:(-b-c)S_A-bS_B)=(*)$$

$$bS_B-cS_C=2s(a-s)(b-c)$$
$$cS_C+(b+c)S_A=cS_C+bS_A+cS_A=c(S_C+S_A)+bS_A=cb^2+bS_A=$$
$$=b(cb+S_A)=2sb(s-a)$$
$$(-b-c)S_A-bS_B=-(bS_A+cS_A+bS_B)=-(b(S_A+S_B)+cS_A)=$$
$$=-(b(S_A+S_B)+cS_A)=-(bc^2+cS_A)=-c(bc+S_A)=-2cs(s-a)$$

$$(*)=(c-b:b:-c)$$

Luego la perpendicular a AI por P será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ c-b & b & -c \\ 0 & -bS_B & cS_C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & -c \\ -bS_B & cS_C \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} c-b & -c \\ 0 & cS_C \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} c-b & b \\ 0 & -bS_B \end{vmatrix}z=$$
$$=(bcS_C-bcS_B)x-(c-b)cS_Cy-bS_B(c-b)z=$$
$$=bc(c+b)(b-c)x-(c-b)cS_Cy-bS_B(c-b)z\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0=bc(b+c)x+cS_Cy+bS_Bz$$

Y su punto de corte Q con la recta AI será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & c & -b \\ bc(b+c) & cS_C & bS_B \end{vmatrix}=$$
$$=\left(\begin{vmatrix} c & -b \\ cS_C & bS_B \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} 0 & -b \\ bc(b+c) & bS_B \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 0 & c \\ bc(b+c) & cS_C \end{vmatrix}\right)=$$
$$=(bcS_B+bcS_C:-b^2c(b+c):-c^2b(b+c))=$$
$$=(bca^2:-b^2c(b+c):-c^2b(b+c))=(-a^2:b(b+c):c(b+c))=Q$$

Sólo queda comprobar que el punto Q pertenece a la circunferencia circunscrita de ΔABC, cuya ecuación es $a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$ (ver 18.9.2)

Efectivamente,

$$a^2b(b+c)c(b+c)-b^2a^2c(b+c)-c^2a^2b(b+c)=$$
$$=abc(b+c)(a(b+c)-ab-ac)=0$$

Observación: Q es el punto medio del arco BC.

23.

$B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$, $I=(a:b:c)$.

El punto D_1 es el pedal del incentro en el lado BC, cuyas coordenadas cartesianas se calcularon en el ejercicio #13, $D_1=(0:s-c:s-b)$, las volvemos a determinar aquí:

La recta BC tiene por ecuación $x=0$, por lo tanto su punto impropio es $v=(0:-1:1)$.
Las rectas perpendiculares a BC tendrán punto impropio:
$(-S_B-S_C:1S_C:S_B)=(S_B+S_C:-S_C:-S_B)$
Luego la recta D_1I será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ S_B+S_C & -S_C & -S_B \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} b & c \\ -S_C & -S_B \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} a & c \\ S_B+S_C & -S_B \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a & b \\ S_B+S_C & -S_C \end{vmatrix}z=$$

$$=(-bS_B+cS_C)x-(-aS_B-c(S_B+S_C))y+(a(-S_C)-b(S_B+S_C))z=$$

$$=(cS_C-bS_B)x+(aS_B+cS_B+cS_C)y-(aS_C+bS_B+bS_C)z=$$

Y el punto D_1 será su intersección con el lado BC:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ cS_C-bS_B & aS_B+cS_B+cS_C & -(aS_C+bS_B+bS_C) \end{vmatrix}=$$

$$=\left(0:-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ cS_C-bS_B & -(aS_C+bS_B+bS_C) \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ cS_C-bS_B & aS_B+cS_B+cS_C \end{vmatrix}\right)=$$

$$=(0:aS_C+bS_B+bS_C:aS_B+cS_B+cS_C)=$$

$$=(0:a^2+b^2-c^2+2ab:a^2-b^2+c^2+2ac)=(0:2S_C+2ab:2S_B+2ac)=$$

$$=(0:S_C+ab:S_B+ac)=(0:2s(s-c):2s(s-b))=(0:s-c:s-b)=D_1$$

Y de la misma forma tenemos $E_1=(s-c:0:s-a)$.

El punto D_2 será el punto simétrico de D_1 respecto del punto medio M del lado BC, $M=(0:1:1)$.

$D_1=(0:s-c:s-b)\Rightarrow\Sigma=s-c+s-b=2s-b-c=a+b+c-b-c=a$
$M=(0:1:1)\Rightarrow\Sigma=2$
$D_1=(0:2(s-c):2(s-b))\Rightarrow\Sigma=2a$
$M=(0:a:a)\Rightarrow\Sigma=2a$
$D_2=2M-D_1=2(0:a:a)-(0:2(s-c):2(s-b))=$
$=(0:2a-2(s-c):2a-2(s-b))=(0:a-(s-c):a-(s-b))=$
$=(0:a-s+c:a-s+b)=(0:a+c-b:a+b-c)=(0:s-b:s-c)$

De la misma forma, el punto E_2 será el punto simétrico de E_1 respecto del punto medio N del lado AC:

$$N=(1:0:1)\Rightarrow\Sigma=2$$
$$E_1=\left(s-c:0:s-a\right)\Rightarrow\Sigma=s-c+s-a=2s-a-c=a+b+c-a-c=b$$
$$N=(b:0:b)\Rightarrow\Sigma=2b$$
$$E_1=\left(2(s-c):0:2(s-a)\right)\Rightarrow\Sigma=2b$$
$$E_2=2N-E_1=(2b:0:2b)-(2(s-c):0:2(s-a))=(2b-2(s-c):0:2b-2(s-a))=$$
$$=\left(b-(s-c):0:b-(s-a)\right)=\left(b-s+c:0:b-s+a\right)=\left(b+c-a:0:a+b-c\right)=$$
$$=(s-a:0:s-c)$$

Determinamos la recta AD_2:

$$0=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & s-b & s-c\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & s-c\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & s-b\end{vmatrix}z=$$
$$=-(s-c)y+(s-b)z$$

Determinamos la recta BE_2:

$$0=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 0 & 1 & 0\\ s-a & 0 & s-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & s-c\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}0 & 1\\ s-a & 0\end{vmatrix}z=$$
$$=(s-c)x-(s-a)z\Leftrightarrow 0=(s-c)x-(s-a)z$$

Y el punto P de corte entre ambas:

$$0=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 0 & -(s-c) & s-b\\ s-c & 0 & -(s-a)\end{vmatrix}=$$
$$=\left(\begin{vmatrix}-(s-c) & s-b\\ 0 & -(s-a)\end{vmatrix}:-\begin{vmatrix}0 & s-b\\ s-c & -(s-a)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0 & -(s-c)\\ s-c & 0\end{vmatrix}\right)=$$
$$=\left((s-c)(s-a):(s-c)(s-b):(s-c)(s-c)\right)=(s-a:s-b:s-c)$$

Determinamos el punto medio R de AD_2:

$$A=(1,0,0)\Rightarrow\Sigma=1$$
$$D_2=\left(0:s-b:s-c\right)\Rightarrow\Sigma=2s-b-c=a$$
$$A=(a,0,0)\Rightarrow\Sigma=a$$
$$R=D_2+A=\left(a:s-b:s-c\right)$$

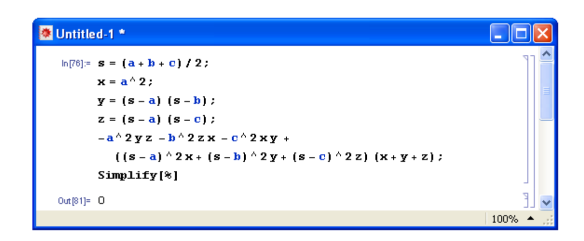
Y el punto P', simétrico de P respecto de R:

$$P=(s-a:s-b:s-c)\Rightarrow\Sigma=3s-(a+b+c)=3s-2s=s$$
$$R=\left(a:s-b:s-c\right)\Rightarrow\Sigma=2s+a-b-c=a+b+c+a-b-c=2a$$
$$P=(2a(s-a):2a(s-b):2a(s-c))\Rightarrow\Sigma=2as$$
$$R=\left(as:s(s-b):s(s-c)\right)\Rightarrow\Sigma=2as$$

$$P' = 2R - P = \left(2as : 2s(s-b) : 2s(s-c)\right) - \left(2a(s-a) : 2a(s-b) : 2a(s-c)\right) =$$
$$= \left(2as - 2a(s-a) : 2s(s-b) - 2a(s-b) : 2s(s-c) - 2a(s-c)\right) =$$
$$= \left(2a(s-s+a)) : 2(s-b)(s-a) : 2(s-c)(s-a)\right) =$$
$$= \left(2a^2 : 2(s-b)(s-a) : 2(s-c)(s-a)\right) = \left(a^2 : (s-b)(s-a) : (s-c)(s-a)\right)$$

Mediante Mathematica comprobamos que el punto P' pertenece a la circunferencia inscrita del triángulo ΔABC, cuya ecuación es (ver 18.9.3)

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + \left((s-a)^2x + (s-b)^2y + (s-c)^2z\right)(x+y+z) = 0$$



Con este argumento hemos determinado un punto P' que pertenece a AD_2 y a la circunferencia inscrita, tal que $AP' = PD_2$. Pero nos quedaría demostrar que dicho punto P' es el más cercano a A.

Un razonamiento mucho más elegante es el que aparece en el documento de Max Schindler y Evan Cheny, el que se se observa que I es el punto medio de D_1P':

$$D_1 = (0 : s-c : s-b) \Rightarrow \Sigma = 2s - b - c = a$$
$$P' = \left(a^2 : (s-b)(s-a) : (s-c)(s-a)\right) \Rightarrow \Sigma = a^2 + (s-b)(s-a) + (s-c)(s-a) = a\,s$$
$$D_1 = \left(0 : s(s-c) : s(s-b)\right) \Rightarrow \Sigma = a\,s$$
$$D_1 + P' = \left(0 : s(s-c) : s(s-b)\right) + \left(a^2 : (s-b)(s-a) : (s-c)(s-a)\right) =$$
$$= \left(a^2 : s(s-c) + (s-b)(s-a) : s(s-b) + (s-c)(s-a)\right) =$$
$$= \left(a^2 : a\,b : ac\right) = (a : b : c) = I$$

Con lo cual demostramos que el punto P' pertenece a la circunferencia inscrita del triángulo ΔABC, y puesto que D_1 y P' están en lados opuestos respecto de la bisectriz BI, y puesto que D_1 y D_2 están en el mismo lado, deducimos que P' es el punto de corte más cercano a A, es decir $Q = P'$, tal y como queríamos ver.

Fuente de la solución: Barycentric Coordinates for the Impatient (Max Schindler, Evan Cheny) Página 5

24.

La mediana AM tiene por ecuación $-y+z=0$ (ver 19.2.1)

La mediatriz de AB tiene por ecuación $0=(a^2-b^2)z+c^2(x-y)$ (ver 18.7.1)

Por lo tanto el punto D será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \\ c^2 & -c^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -c^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ c^2 & -c^2 \end{vmatrix}z=$$

$$=\left(-(a^2-b^2)+c^2:c^2:c^2\right)=\left(c^2-a^2+b^2:c^2:c^2\right)=D$$

La recta BD tendrá por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ c^2-a^2+b^2 & c^2 & c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c^2 & c^2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c^2-a^2+b^2 & c^2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c^2-a^2+b^2 & c^2 \end{vmatrix}z=$$

$$=c^2x-(c^2-a^2+b^2)z\Leftrightarrow 0=c^2x+(a^2-b^2-c^2)z$$

La mediatriz de AC tiene por ecuación $0=\left(c^2-a^2\right)y+b^2(z-x)$ (ver 18.7.1)

Por lo tanto el punto E será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -b^2 & c^2-a^2 & b^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ c^2-a^2 & b^2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & b^2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -b^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}z=$$

$$=\left(-b^2-(c^2-a^2):-b^2:-b^2\right)=\left(b^2+c^2-a^2:b^2:b^2\right)=E$$

La recta CE tendrá por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ b^2+c^2-a^2 & b^2 & b^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b^2 & b^2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b^2+c^2-a^2 & b^2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b^2+c^2-a^2 & b^2 \end{vmatrix}z=$$

$$=-b^2x+(b^2+c^2-a^2)y\Leftrightarrow 0=b^2x+(a^2-b^2-c^2)y$$

El punto F de intersección entre BD y CE será:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ c^2 & 0 & a^2-b^2-c^2 \\ b^2 & a^2-b^2-c^2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix} 0 & a^2-b^2-c^2 \\ a^2-b^2-c^2 & 0 \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} c^2 & a^2-b^2-c^2 \\ b^2 & 0 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c^2 & 0 \\ b^2 & a^2-b^2-c^2 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(-(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2-c^2):b^2(a^2-b^2-c^2):c^2(a^2-b^2-c^2)\right)=$$

$$=\left(b^2+c^2-a^2:b^2:c^2\right)=F$$

Determinamos la circunferencia que pasa por A, P y N:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (u\,x + v\,y + w\,z)(x + y + z) = 0$$

Pasa por $A = (1,0,0)$

$$a^2 0 + b^2 0 + c^2 0 - (u1 + v0 + w0)(1) = 0 \Leftrightarrow -u = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Pasa por $P = (1:1:0)$

$$a^2 0 + b^2 0 + c^2 1 - (v1 + w0)(2) = 0 \Leftrightarrow c^2 - 2v = 0 \Rightarrow v = \frac{c^2}{2}$$

Pasa por $N = (1:0:1)$

$$a^2 0 + b^2 1 + c^2 0 - \left(\frac{c^2}{2} 0 + w1\right)(2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - 2w = 0 \Leftrightarrow w = \frac{b^2}{2}$$

La ecuación es, pues:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{1}{2}\left(c^2\,y + b^2\,z\right)(x + y + z) = 0$$

Sólo nos queda comprobar que el punto F pertenece a esta circunferencia:

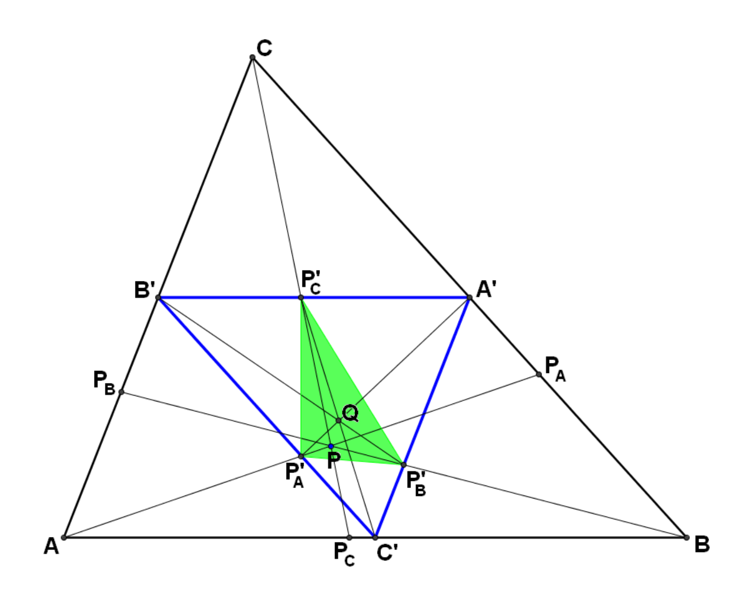
$$F = \left(b^2 + c^2 - a^2 : b^2 : c^2\right)$$
$$a^2b^2c^2 + b^2c^2(b^2 + c^2 - a^2) + c^2(b^2 + c^2 - a^2)b^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\left(c^2b^2 + b^2c^2\right)(b^2 + c^2 - a^2 + b^2 + c^2) =$$
$$= a^2b^2c^2 + 2b^2c^2(b^2 + c^2 - a^2) - b^2c^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) =$$
$$= a^2b^2c^2 + 2b^2c^2b^2 + 2b^2c^2c^2 - 2b^2c^2a^2 - 2b^2b^2c^2 - 2c^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 = 0$$

Nota: en "Barycentric Coordinates for the Impatient (Max Schindler, Evan Cheny)" se sigue un razonamiento alterantivo interesante.

25.

Ejercicio 1.
Es el ejercicio #2 de este volumen.

Ejercicio 3.



El triángulo medial tiene por coordenadas $A' = (0:1:1)$, $B' = (1:0:1)$, $C' = (1:1:0)$

Sea un punto $P = (p, q, r)$.
Por 18.5.1 su triángulo cevial asociado tiene por vértices

$$P_A = (0:q:r)\ ,\ P_B = (p:0:r),\ \text{y}\ P_C = (p:q:0)$$

El punto medio $P_A^{/}$ del segmento AP_A es
$A = (1,0,0) \Rightarrow \Sigma = 1$
$P_A = (0:q:r) \Rightarrow \Sigma = q + r$
$A = (q + r : 0 : 0) \Rightarrow \Sigma = q + r$
$P_A^{/} = A + P_A = (q + r : 0 : 0) + (0 : q : r) = (q + r : q : r)$
Y de la misma forma $P_B^{/} = (p : p + r : r)$ y $P_C^{/} = (p : q : p + q)$
La recta $A'P_A^{/}$ es

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ q+r & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q & r \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ q+r & r \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ q+r & q \end{vmatrix} z = (r-q)x + (q+r)y - (q+r)z$$

La recta $B'P_B^{/}$ es

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ p & p+r & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p+r & r \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & r \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p & p+r \end{vmatrix} z = -(p+r)x - (r-p)y + (p+r)z \Leftrightarrow$$

$0 = (p + r)x + (r - p)y - (p + r)z$

La recta $C'P_C^{/}$ es

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ p & q & p+q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ q & p+q \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p & p+q \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{vmatrix}z=(p+q)x-(p+q)y+(q-p)z$$

Y estas tres rectas son concurrentes, pues su determinante se anula:

$$\begin{vmatrix} r-q & q+r & -q-r \\ p+r & r-p & -p-r \\ p+q & -p-q & q-p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r-q-q-r & q+r-q-r & -q-r \\ p+r-p-r & r-p-p-r & -p-r \\ p+q+q-p & -p-q+q-p & q-p \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -2q & 0 & -q-r \\ 0 & -2p & -p-r \\ 2q & -2p & q-p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2q & 0 & -q-r \\ 0 & -2p & -p-r \\ 0 & -2p & -p-r \end{vmatrix}=0$$

Para encontrar su punto de corte determinamos el punto de corte de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ r-q & q+r & -q-r \\ p+r & r-p & -p-r \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} q+r & -q-r \\ r-p & -p-r \end{vmatrix}:-\begin{vmatrix} r-q & -q-r \\ p+r & -p-r \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} r-q & q+r \\ p+r & r-p \end{vmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} (q+r)(-p-r)-(r-p)(-q-r):-(r-q)(-p-r)+(p+r)(-q-r): \\ (r-q)(r-p)-(p+r)(q+r) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (q+r)(-p-r)+(r-p)(q+r):(r-q)(p+r)+(p+r)(-q-r): \\ -(q+r)(r-p)-(p+r)(q+r) \end{pmatrix}=$$

$$=\big((q+r)(-p-r+r-p):(p+r)(r-q-q-r):(q+r)(-r+p-p-r)\big)=$$

$$=\big((q+r)(-2p):(p+r)(-2q):(q+r)(-2r)\big)=\big(p(q+r):q(p+r):r(q+r)\big)=Q$$

26.

Sea N el punto medio de AC y M el punto medio de BC.
La recta AM tiene por ecuación $y - z = 0$ y por tanto su vector de desplazamiento es $v = (-2,1,1)$.

La reca BN tiene por ecuación $x - z = 0$ y por tanto su vector de desplazamiento es $w = (1,-2,1)$.

$0 = \vec{v} \cdot \vec{w} = S_A v_1 w_1 + S_B v_2 w_2 + S_C v_3 w_3$

Aplicamos 18.8.3d:

$$AM \perp BN \Leftrightarrow 0 = v \cdot w = S_A v_1 w_1 + S_B v_2 w_2 + S_C v_3 w_3 =$$

$$= -2S_A - 2S_B + S_C = -2\left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}\right) - 2\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}\right) + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 - 5c^2 = 0 \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$$